элементарное введение в теорию интеграла

Г. П. АКИЛОВ, Б. М. МАКАРОВ, В. П. ХАВИН

элементарное введение в теорию интеграла

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Г. П. АКИЛОВ, Б. М. МАКАРОВ, В. П. ХАВИН

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебного пособия для студентов государственных университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1969

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В книге излагается материал, обычно изучаемый на I и II курсах физико-математических факультетов университетов (интегральное исчисление, в частности кратные и несобственные интегралы). Изложение основано на современной теории меры, которой посвящена глава I. Необходимые для понимания книги сведения из смежных разделов анализа (элементы теории множеств, суммируемые числовые семейства, дифференцируемые отображения евклидовых пространств) составляют содержание трех добавлений.

Книга предназначена для студентов младших курсов и для лиц, занимающихся самообразованием.

Отв. редактор *С. А. Виноградов*

$\frac{2-2-3}{61-68}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная теория меры и интеграла очень полно и всесторонне освещена в многочисленных и прекрасных руководствах. Однако, насколько нам известно, среди этих руководств нет такого, которое было бы предназначено специально для студентов младших курсов. Между тем теория интеграла достигла такой законченности, ясности и простоты, что ею вполне может овладеть студент-второкурсник. В то же время принятый в университетских учебниках анализа способ изложения разделов, посвященных интегралу, устарел и не соответствует представлениям, прочно вошедшим в математику. Ведь не случайно преподаватели нескольких университетов (Московского, Ленинградского, Новосибирского), не сговариваясь между собой, приступили к основательной перестройке курса анализа, начав эту перестройку с теории интеграла.

Согласно давно установившейся традиции, в университетских курсах анализа до недавнего времени учащихся впервые знакомили с интегралом как с интегралом Римана по промежутку числовой прямой. На этой основе учащиеся изучали приемы вычисления интеграла и его приложения. Затем излагалась (обычно гораздо менее отчетливо и аккуратно) теория кратных интегралов, причем двойные интегралы вводились отдельно от тройных, а тройные — отдельно от «многократных». Изучались еще так называемые несобственные интегралы, причем «несобственным» считался, например, интеграл по бесконечному промежутку, независимо от того, суммируема на этом промежутке подынтегральная функция или нет. Кроме того, сообщались еще некоторые сведения об интегралах Стилтьеса и об интегралах по поверхностям и кривым. Все это происходило на первых двух курсах. Таким образом, к концу второго года обучения теория интеграла представала перед учащимися как нечто чрезвычайно пестрое (ведь он изучил по крайней мере десять разновидностей интеграла).

Затем, обычно на III курсе, студент знакомился с современными концепциями интеграла (иногда, правда, только с интегралом по мере Лебега) в курсе теории функций вещественной переменной, которая обычно не сопровождалась упражнениями и не связывалась со сведениями, полученными на первых двух курсах. Все это способствовало тому, что теория интеграла, несмотря на ее ясность и простоту, воспринималась учащимися как предмет какой-то особо высокой, абстрактной науки, не имеющей ничего общего с теми задачами, которые решались ими на младших курсах.

Такой способ изложения теории интеграла связан с непроизводительными затратами времени, не отражает реального состояния науки, а главное, он чересчур сложен и труден. Нет сомнения в том, что теория кратных интегралов становится проще и понятнее, если вместо меры Жордана, которая по существу и применяется в распространенных руководствах, положить в ее основу меру Лебега.

Настоящая книга отражает опыт преподавания теории интеграла на II курсе математико-механического факультета Ленинградского университета, накопленный за несколько последних лет.

На I курсе студенты знакомятся с интегралом от непрерывной функции по промежутку вещественной прямой.

Основная цель изучения интеграла на I курсе — удовлетворить настоятельные потребности смежных дисциплин (курс дифференциальных уравнений, курс механики и т. д.) и научить студента решать простейшие задачи, требующие приложения интегрального исчисления (для непрерывных функций одной переменной). При этом основное внимание уделяется алгорифмической стороне дела, а всякого рода вопросы существования остаются пока без ответа. (Это не значит, конечно, что от студентов скрывают постановку этих вопросов.)

Мыслимы различные способы введения интеграла на I курсе.

Можно определить интеграл от непрерывной функции по промежутку как приращение первообразной на этом промежутке, постулировав существование этой первообразной. Можно определить интеграл как функционал, заданный на некотором множестве функций и обладающий несколькими простыми свойствами, допускающими наглядное истолкование. При этом, разумеется, возникает вопрос о существовании и единственности такого функционала; этот вопрос также остается пока без ответа. При обоих способах введения интеграла основные его свойства, в том числе и тот факт, что интеграл от непрерывной функции есть предел римановых сумм, совершенно элементарно и наглядно выводятся в течение одной-двух лекций, после чего основное внимание уделяется приложениям.

Эта книга написана для студентов II курса, уже знакомых с интегралом от непрерывной функции по промежутку вещественной прямой (быть может, без достаточного обоснования фактов, связанных с проблемами существования).

Глава I книги посвящена теории меры. Здесь излагаются сведения о системах множеств (полукольца, кольца, алгебры), изучаются аддитивные и счетно-аддитивные функции множеств (главным образом, неотрицательные). Основная трудность в первой главе связана с построением меры Лебега в евклидовом пространстве. Опыт показывает, что студенты хорошо справляются с этой трудностью. Впрочем, возможен и такой вариант изложения, при котором свойства меры Лебега, определяющие ее, лишь перечисляются, а вопрос о ее существовании решается на более поздних этапах обучения — или в специальном курсе теории меры, или в курсе функционального анализа. Некоторые места в первой главе, без которых можно обойтись в дальнейшем изложении, набраны петитом.

В конце первой главы доказывается инвариантность меры Лебега относительно движений.

В гл. II (и основной) дается определение интеграла от функции, заданной на множестве E, принадлежащем произвольному σ-кольцу, на котором задана счетно-аддитивная мера. Ни конечность меры множества E, ни ограниченность функции при этом не предполагаются. Таким образом, студенту сообщается одно единственное определение интеграла и суммируемой функции. Здесь подробно изучаются и свойства интеграла. Попутно дается обоснование теории интеграла, изложенной на первом курсе. Кроме того, во второй главе излагается теория измеримых функций, доказываются теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, теорема Фубини и теорема о замене переменной в кратных интегралах. Большое внимание уделяется приемам вычисления интегралов от конкретных функций.

В последней гл. III излагается теория несобственных интегралов (точнее, теория интегралов от несуммируемых функций) и интегралов, зависящих от параметра.

Изложение во всех трех главах книги тесно связано с другими разделами курса анализа. Чтобы облегчить читателю изучение книги, мы снабдили ее тремя добавлениями. Цель первого добавления — уточнить терминологию и обозначения, связанные с простейшими теоретико-множественными понятиями. Во втором — излагается теория суммируемых семейств вещественных чисел. Эта теория (в которой речь идет по существу об интеграле по дискретной мере) постоянно используется в первых двух главах. Знакомство с суммируемыми числовыми семействами может быть полезным и при изучении других разделов курса анализа.

В третьем добавлении сообщаются необходимые для понимания книги сведения о евклидовых пространствах и о дифференцируемых отображениях этих пространств. Формулируемые здесь теоремы, как правило, не доказываются. Исключение сделано лишь для теорем о дифференцируемых отображениях. Третье добавление заканчивается теоремой о локальной обратимости гладкого отображения с ненулевым якобианом. Идея доказательства этой теоремы заимствована нами из книги У. Рудина «Основы математического анализа».

Избранная нами манера изложения определяется тем, что книга предназначена для начинающих, для вчерашних первокурсников. Именно поэтому мы старались, чтобы весь основной текст (т. е. формулировки и доказательства теорем) был написан на одном и том же уровне строгости, по возможности близком к принятому в современной математике. Среди преподающих математику распространена точка зрения, согласно которой студенту нужно продемонстрировать аккуратные и точные рассуждения лишь на отдельных примерах (как правило, сравнительно несложных, например на теореме Коши об обращении непрерывной функции в нуль), тогда как во многих случаях (особенно связанных с реальными трудностями) ссылка на интуицию, на наглядные представления, апелляция к образному мышлению могут заменить формальные определения и рассуждения. Мы не стоим на такой точке зрения. Мы считаем, что переход от одного уровня строгости к другому, т. е. от одного уровня понимания слова «доказано» к другому, — это самое трудное для начинающего изучение математики. Поэтому наличие разных уровней строгости в одном учебнике способно сбить с толку и дезориентировать учащегося; ему трудно понять, почему в одном месте нечто «очевидное» (скажем, та же теорема Коши) тщательно доказывается, а в другом месте отнюдь не более очевидное утверждение (скажем, об аддитивности площади прямоугольника в R^n) принимается на веру.

Значение математики в наше время определяется не только многочисленными добытыми ею конкретными фактами, не только вычислительными (в широком смысле этого слова) приемами, в ней разработанными. Все большую роль в приложениях начинает играть язык, на котором учит разговаривать математика, та недвусмысленность, с которой выражают свои мысли математики. Этому языку, наряду с конкретными математическими фактами, призвана, на наш взгляд, учить каждая математическая дисциплина, в особенности каждая дисциплина, излагаемая студентам-младшекурсникам.

Все сказанное по поводу строгости изложения относится лишь к основному тексту, т. е., как уже было разъяснено выше, к формулировкам определений и теорем и к доказательствам теорем. Разумеется, создание у учащихся правильных образных и наглядных представлений в связи с излагаемыми фактами — чрезвычайно важная задача. Было бы наивным и вредным делом пытаться вообще «изгнать интуицию». Напротив, мы старались по возможности опираться на нее и помочь читателю наглядно, чувственно воспринимать содержание теорем, сопровождая их пояснениями, в которых в грубой, упрощенной форме излагается идея доказательства, говорится о значении того или иного факта. В такого рода пояснениях мы не стесняемся в выражениях, не ограничиваем себя узкими терминологическими рамками и используем все средства (в первую очередь чертежи) для того, чтобы пробудить в читателе ощущение естественности излагаемых результатов. Но важно, чтобы всякие терминологические вольности, всякие ссылки на интуицию были бы четко отделены от основного текста, изгнаны из ответственных формулировок и из доказательств теорем. Наконец, отметим, что воспитанию правильной интуиции не в последнюю очередь служат и все доказательства теорем.

Несколько слов о системе ссылок, принятых в книге. Каждая глава подразделяется на параграфы, а параграфы — на пункты. Пункты нумеруются упорядоченными парами арабских цифр; первая цифра пары — номер параграфа, содержащего данный пункт, вторая — номер пункта. Главы нумеруются римскими цифрами. При ссылках внутри параграфа номера главы и параграфа опускаются. Для теорем принята сквозная нумерация внутри каждого параграфа (или добавления). Чтобы облегчить разыскание нужной теоремы, рядом с номером теоремы в скобках иногда указываются номера параграфа и главы (или добавления). Например, теорема 2(5.II) — это вторая теорема пятого параграфа главы II; теорема 2 из д. 3 — это вторая теорема третьего добавления. Теоремами мы называем лишь особо важные утверждения. Вспомогательные утверждения мы называем предложениями или леммами. Нумерация предложений — сквозная в пределах каждого пункта.

Глава I (за исключением § 4, написанного В. П. Хавиным) написана Г. П. Акиловым, глава II (кроме § 4—5, написанных Г. П. Акиловым) и добавления — В. П. Хавиным, гл. III — Б. М. Макаровым.

Ответственный редактор книги С. А. Виноградов устранил многочисленные недочеты и внес ряд принятых нами предложений, способствовавших сокращению и улучшению книги. Б. З. Вулих и Г. И. Натансон внимательно прочитали всю книгу в рукописи и сделали много очень ценных замечаний, учтенных при окончательном редактировании книги. При написании § 6 главы II мы пользовались советами М. Ф. Широхова и Д. А. Владимирова.

В оформлении рукописи большое участие принимала Н. А. Акилова.

Всем названным лицам мы приносим глубокую благодарность.

Глава I

ТЕОРИЯ МЕРЫ

Понятие, обозначаемое термином «мера», является, по-видимому, одним из наиболее распространенных не только в математике, но, смело можно сказать, и во всей человеческой практике. Действительно, каждый человек сталкивается с измерением длин и площадей, с нахождением объемов, со взвешиванием, т. е. имеет дело с определением тех или иных числовых характеристик материальных объектов. Общей чертой всех перечисленных характеристик является их аддитивность: значение характеристики объекта, состоящего из двух или более частей, совпадает с суммой значений, отвечающих этим частям.

Под мерой в математике как раз и понимают числовую функцию, обладающую свойством аддитивности (и, возможно, еще некоторыми другими свойствами, играющими, впрочем, уже не столь существенную роль).

Чтобы можно было говорить об аддитивности некоторой функции, надо, чтобы область ее определения $\mathfrak{R}$ состояла из таких объектов, которые в том или ином смысле допускают «разбиения» на части, также входящие в состав $\mathfrak{R}$, как, например, будет, когда $\mathfrak{R}$ — система подмножеств некоторого данного множества. Следует, впрочем, иметь в виду, что нередко рассматриваются и такие аддитивные функции, область определения которых не состоит явным образом из множеств. Такого рода функцией будет, скажем, вероятность — она определена на множестве событий. Мы, однако, будем иметь дело исключительно с аддитивными функциями, заданными на той или иной системе подмножеств множества R^ν,* т. е., как говорят, с аддитивными функциями множества.

Настоящая глава не преследует самостоятельных целей, поэтому мы ограничимся в ней только теми сведениями из теории меры, на которые опираются построения следующих, основных, глав.

* По поводу определения множества R^ν см. д. 1, п. 5. В большинстве случаев R^ν можно было бы заменить произвольным множеством.

§ 1. Системы множеств

Областью определения функции множества может быть, конечно, любая система множеств. Тем не менее, как и в случае обычных, заданных на числовой оси, функций, наличие у области задания функции тех или иных свойств позволяет получить более глубокие результаты. Это обстоятельство и заставляет прежде, чем изучать сами функции, заняться рассмотрением систем множеств, выделив из них те, свойства которых хорошо приспособлены к свойствам аддитивных функций.

1.1. Простейшей с точки зрения вычисления площади фигурой на плоскости является прямоугольник. Прямоугольники, или, если говорить о подмножествах множества R^{ν} ($\nu=3, 4, \ldots$), прямоугольные параллелепипеды, и по многим другим причинам представляют интерес в теории меры. Поэтому изучение систем множеств мы начнем именно с систем прямоугольников.

Определение 1. Пусть даны 2ν ($\nu=1, 2, \ldots$) конечных вещественных чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu$, причем $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2, \ldots, a_\nu \leqslant b_\nu$. Множество P (см. д. 1, п. 5)

$$P=[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu) \tag{1}$$

мы будем называть *прямоугольником* (полуоткрытым) *размерности* ν. Если $\nu=1$, то прямоугольник называют обычно *промежутком.** Таким образом, прямоугольник P представляет собой множество всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in R^{\nu}$, таких, что $a_k \leqslant x_k < b_k$ ($k=1, 2, \ldots, \nu$). Понятно, что если $a_k=b_k$ хотя бы при одном k ($k=1, 2, \ldots, \nu$), то $P=\Lambda$**. Справедливо, разумеется, и обратное утверждение.

Множество всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν мы будем обозначать $\mathfrak{P}^{\nu}$.

Рассмотрим два прямоугольника

$$P_i=\left[a_1^{(i)}, b_1^{(i)}\right) \times \left[a_2^{(i)}, b_2^{(i)}\right) \times \ldots \times \left[a_\nu^{(i)}, b_\nu^{(i)}\right) \quad (i=1, 2). \tag{2}$$

Тогда

$$P_1 \cap P_2=\left\{\left[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}\right) \cap \left[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}\right)\right\} \times \left\{\left[a_2^{(1)}, b_2^{(1)}\right) \cap \left[a_2^{(2)}, b_2^{(2)}\right)\right\} \times$$
$$\times \ldots \times \left\{\left[a_\nu^{(1)}, b_\nu^{(1)}\right) \cap \left[a_\nu^{(2)}, b_\nu^{(2)}\right)\right\}.$$

Но пересечение двух полуоткрытых промежутков, очевидно, снова представляет собой такой же промежуток (возможно, пустой). Следовательно, справедливо следующее предложение.

---

* При $\nu \neq 2$ термин „прямоугольник" также выглядит несколько необычно. Слово „параллелепипед" обладает, однако, тем же недостатком при $\nu=1, 2$ и, кроме того, трудно произносимо.

** Символом Λ обозначается пустое множество (см. д. 1, п. 1).

П р е д л о ж е н и е 1. Пересечение $P_1 \cap P_2$ прямоугольников P_1, P_2 размерности ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) является прямоугольником размерности ν.

Предположим, что один из прямоугольников (2) содержится в другом, например $P_1 \subset P_2$. В этом предположении установим следующий факт (рис. 1).

П р е д л о ж е н и е 2. Существует конечное семейство $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ прямоугольников размерности ν, такое, что

$$P_1 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = P_2, \quad Q_k \setminus Q_{k-1} \in \mathfrak{P}^\nu \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

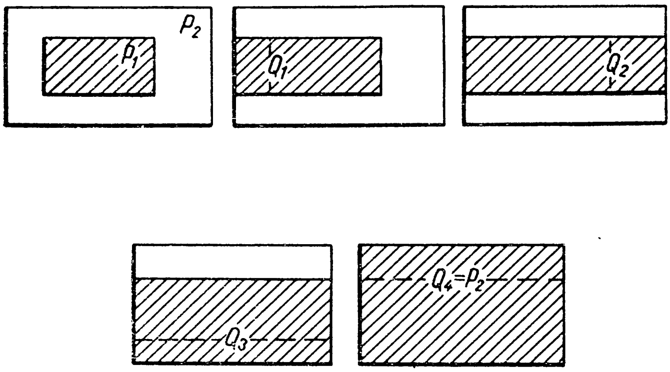

Рис. 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в случае $P_1 = \Lambda$ утверждение очевидно ($m = 1$, $Q_0 = P_1$, $Q_1 = P_2$). В общем случае включение $P_1 \subset P_2$ позволяет заключить (д. 1, п. 5), что

$$\left[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}\right) \subset \left[a_k^{(2)}, b_k^{(2)}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{4}$$

Доказательство проведем методом индукции по ν. Если $\nu = 1$, то, как легко проверить, можно принять $m = 2$, $Q_0 = P_1$, $Q_1 = \left[a_1^2, b_1^1\right)$, $Q_2 = P_2$.

Пусть n — натуральное число. Предположим, что предложение верно, если размерность $\nu = n$, и докажем его справедливость для случая $\nu = n + 1$. Обозначим

$$P_3 = \left[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}\right) \times \left[a_2^{(1)}, b_2^{(1)}\right) \times \ldots \times \left[a_n^{(1)}, b_n^{(1)}\right);$$

$$P_4 = \left[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}\right) \times \left[a_2^{(2)}, b_2^{(2)}\right) \times \ldots \times \left[a_n^{(2)}, b_n^{(2)}\right)$$

(т. е. $P_1 = P_3 \times \left[a_{n+1}^{(1)}, b_{n+1}^{(1)}\right)$, $P_2 = P_4 \times \left[a_{n+1}^{(2)}, b_{n+1}^{(2)}\right)$).

Вследствие (4) $P_3 \subset P_4$, стало быть, по индуктивному предположению найдутся прямоугольники $Q_0', Q_1', \ldots, Q_k' \in \mathfrak{P}^n$, такие, что

$$P_3 = Q_0' \subset Q_1' \subset \ldots \subset Q_k' = P_4; \; Q_i' \setminus Q_{i-1}' \in \mathfrak{P}^n \; (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Примем $m = k + 2$ и

$$Q_0 = Q_0' \times \left[a_{n+1}^{(1)}, b_{n+1}^{(1)}\right) = P_1, \quad Q_1 = Q_1' \times \left[a_{n+1}^{(1)}, b_{n+1}^{(1)}\right), \ldots$$

$$\ldots, \; Q_k = Q_k' \times \left[a_{n+1}^{(1)}, b_{n+1}^{(1)}\right),$$

$$Q_{k+1} = Q_k' \times \left[a_{n+1}^{(2)}, b_{n+1}^{(1)}\right), \; Q_{k+2} = Q_k' \times \left[a_{n+1}^{(2)}, b_{n+1}^{(2)}\right) = P_2.$$

При этом

$$Q_i \setminus Q_{i-1} = (Q_i' \setminus Q_{i-1}') \times [a_{n+1}^{(1)}, b_{n+1}^{(1)}) \in \mathfrak{P}^{n+1} \quad (i=1, 2, \ldots, k),$$

$$Q_{k+1} \setminus Q_k = Q_k' \times [a_{n+1}^{(2)}, a_{n+1}^{(1)}) \in \mathfrak{P}^{n+1},$$

$$Q_{k+2} \setminus Q_{k+1} = Q_k' \times [b_{n+1}^{(1)}, b_{n+1}^{(2)}) \in \mathfrak{P}^{n+1}.$$

Хотя разность двух прямоугольников уже не является, вообще говоря, прямоугольником, но ее можно представить в виде объединения конечного семейства прямоугольников.

Предложение 3. Пусть $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Существует конечное семейство $P^1, P^2, \ldots, P^n$ попарно не пересекающихся прямоугольников размерности ν, такое, что

$$P_2 \setminus P_1 = \bigcup_{k=1}^{n} P^k. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $P_2 \setminus P_1 = P_2 \setminus (P_2 \cap P_1)$, а пересечение $P_2 \cap P_1$ в силу предложения 1 также является прямоугольником, то можно считать, что $P_1 \subset P_2$. В соответствии с предложением 2 найдем прямоугольники $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$, удовлетворяющие условиям (3). Чтобы доказать наше предложение, достаточно принять

$$P^k = Q_k \setminus Q_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Замечание 1. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$ — непустые промежутки числовой прямой R. Символом D обозначим произведение $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_\nu$, а символом $\mathfrak{P}_D^\nu$ — множество всех полуоткрытых прямоугольников

$$P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu) \quad (a_k \leqslant b_k;\ a_k, b_k \in \Delta_k;\ k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Легко понять, что система $\mathfrak{P}_D^\nu$ обладает теми же свойствами, что и система $\mathfrak{P}^\nu$. Для нее верны предложения 1, 2 и 3. Отметим еще, что если $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_\nu = (-\infty, +\infty)$, т. е. если $D = R^\nu$, то $\mathfrak{P}_D^\nu = \mathfrak{P}^\nu$.

1.2. Если вместо системы $\mathfrak{P}^\nu$ рассмотреть множество всех замкнутых (или открытых) прямоугольников, т. е. произведений ν замкнутых (соответственно открытых) промежутков, то предложения 2 и 3 из п. 1.1 будут неверны. Между тем, как будет видно из дальнейшего изложения, система $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников важна не сама по себе, а лишь в силу того, что для нее справедливы предложения 1, 2 и 3 предыдущего пункта.

Это обстоятельство делает целесообразным рассмотрение систем любых множеств, лишь бы они удовлетворяли условиям, заключенным в предложениях 1, 2 и 3 из п. 1.1, и мы приходим к следующему определению.

Определение 1. Система $\mathfrak{P}$ подмножеств множества R^ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ называется *полукольцом* при выполнении следующих условий:

1) $\Lambda \in \mathfrak{P}$;

2) если $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, то $P_1 \cap P_2 \in \mathfrak{P}$;

3) если $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ и $P_1 \subset P_2$, то существует конечное семейство $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ множеств, обладающее свойствами

$$P_1 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = P_2;\ Q_i \in \mathfrak{P};\ Q_k \setminus Q_{k-1} \in \mathfrak{P}\ (i = 0, 1, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Ясно, что для полукольца $\mathfrak{P}$ имеет место факт, аналогичный предложению 3 из п. 1.1:

Предложение 1. Если $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, то существует конечное семейство $P^1, P^2, \ldots, P^n$ попарно не пересекающихся множеств из $\mathfrak{P}$, для которого

$$P_2 \setminus P_1 = \bigcup_{k=1}^{n} P^k.$$

Примером (и прообразом самого понятия) полукольца служит система $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν ($\nu = 1, 2, \ldots$).

Укажем еще на один пример полукольца, полезный в приложениях. Пусть Δ — какой-либо промежуток числовой прямой. Этот промежуток может быть конечным или бесконечным, замкнутым, открытым или полуоткрытым. Обозначим через $\mathfrak{P}$ систему всех промежутков (всех возможных видов), содержащихся в Δ. Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{P}$ — полукольцо. Не останавливаясь совершенно на проверке условий 1) и 2), разберем лишь один из мыслимых случаев в связи с условием 3). Пусть, например, $P_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $P_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ и $\alpha_2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2$. Очевидно, можно принять $Q_0 = P_1$, $Q_1 = [\alpha_2, \beta_1)$, $Q_2 = P_2$. Тогда $Q_1 \setminus Q_0 = [\alpha_2, \alpha_1]$, $Q_2 \setminus Q_1 = [\beta_1, \beta_2]$. Этот пример может быть обобщен и на многомерный случай. Соответствующие формулировки и рассуждения мы предоставляем читателю.

Можно было бы не связывать определение полукольца с множеством R^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), заменив его множеством произвольной природы, т. е. можно было бы понимать под полукольцом систему подмножеств данного множества X, обладающую теми же свойствами 1)—3). Все сказанное здесь и ниже о полукольцах справедливо вместе с доказательствами и для этого общего случая.

1.3. Полуоткрытые прямоугольники, несмотря на свою простоту, а скорее именно ввиду простоты, обладают одним существенным недостатком — их слишком мало. Уже в элементарной геометрии возникает задача измерения фигур, которые не являются прямоугольниками. Это вынуждает рассматривать системы множеств, более богатые, чем система $\mathfrak{P}^\nu$. При этом оказывается полезным следующее абстрактное понятие.

Определение 1. Система $\mathfrak{R}$ подмножеств множества R^ν называется *кольцом* при выполнении следующих условий:

1) $\Lambda \in \mathfrak{R}$;

2) если $A, B \in \mathfrak{R}$, то $A \cup B \in \mathfrak{R}$ и $A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

Как мы покажем ниже, кольцом является система всех полуоткрытых прямоугольников и их конечных объединений. Хотя эта система довольно бедна, ее элементами можно в некотором смысле приближать разнообразные множества (см. ниже лемму в п. 1.5).

Укажем еще некоторые (значительно менее интересные) примеры колец. Кольцом будет система, состоящая из единственного пустого множества. Система, состоящая из всех подмножеств множества R^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), также, конечно, представляет собой кольцо. Наконец, кольцом является система всех конечных (или не более чем счетных) подмножеств множества R^ν.

Отметим некоторые простейшие свойства колец.

Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо. Рассмотрим множества $A, B \in \mathfrak{R}$. Очевидно, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. Но $A \setminus B \in \mathfrak{R}$ в силу условия 2); в силу того же условия $A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}$. Таким образом, пересечение двух множеств, входящих в кольцо $\mathfrak{R}$, также содержится в $\mathfrak{R}$. Ясно, что объединение и пересечение конечного семейства множеств из кольца $\mathfrak{R}$ входит в кольцо $\mathfrak{R}$.

Итак, простейшие теоретико-множественные операции не выводят за рамки кольца. Как говорят в подобных случаях, кольцо замкнуто относительно указанных операций.

Как и в случае полукольца (п. 1.2), определение кольца можно высказать в более общей форме, понимая под кольцом систему подмножеств произвольного множества, обладающую свойствами 1) и 2).

Отметим, что всякое кольцо является, конечно, и полукольцом (но не наоборот, как видно на примере полукольца $\mathfrak{P}^\nu$). Система $\mathfrak{P}^\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) всех полуоткрытых прямоугольников (п. 1.1) не является, очевидно, кольцом. Однако имеется кольцо с довольно простой структурой, охватывающее систему $\mathfrak{P}^\nu$.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — конечное семейство попарно не пересекающихся (полуоткрытых) прямоугольников размерности ν. Пусть

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k \quad (P_{k'} \cap P_{k''} = \Lambda \text{ при } k' \neq k''). \tag{7}$$

Обозначим через $\mathfrak{R}^\nu$ систему всех множеств, представимых в виде (7). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (1.I). *Система $\mathfrak{R}^\nu$ является кольцом, содержащим систему $\mathfrak{P}^\nu$. Если $\mathfrak{R}$ — произвольное кольцо подмножеств множества R^ν, содержащее систему $\mathfrak{P}^\nu$, то $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}^\nu$.*

Доказательство. Каждый прямоугольник $P \in \mathfrak{P}^\nu$, очевидно, допускает представление в форме (7) ($n = 1, P_1 = P$), поэтому $P \in \mathfrak{R}^\nu$, т. е. $\mathfrak{P}^\nu \subset \mathfrak{R}^\nu$.

Условимся называть представление множества $A \in \mathfrak{R}^\nu$ в форме (7), т. е. в форме объединения конечного семейства попарно не пересекающихся прямоугольников, регулярным представлением. *

Убедимся сначала, что если $A, B \in \mathfrak{R}^\nu$, то и $A \cap B \in \mathfrak{R}^\nu$.

Пусть (7) — регулярное представление множества A, а

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j \tag{8}$$

— регулярное представление множества B. Так как (см. д. 1, п. 6, предл. 1)

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (P_k \cap Q_j),$$

и в силу предложения 1 из п. 1.1 пересечения $P_k \cap Q_j$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) представляют собой прямоугольники, очевидно, не имеющие друг с другом общих элементов, то по самому определению системы $\mathfrak{R}^\nu$ оказывается $A \cap B \in \mathfrak{R}^\nu$. Очевидно, пересечение любого конечного семейства множеств из $\mathfrak{R}^\nu$ входит в эту систему.

Отметим еще такой очевидный факт: если множества $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}^\nu$ попарно не пересекаются, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{R}^\nu$.

---

* Регулярное представление данного множества, разумеется, не единственно.

Пользуясь доказанным, проверим, что разность $A \setminus B$ множеств A, $B \in \mathfrak{R}^\nu$ принадлежит системе $\mathfrak{R}^\nu$.

Пусть опять (7) и (8) — регулярные представления множеств A и B соответственно. Предположим сначала, что в этих представлениях $n = 1$, $m = 1$, т. е. что сами A и B являются прямоугольниками. В этом случае доказываемое утверждение немедленно вытекает из предложения 3 (п. 1.1).

Пусть по-прежнему $n = 1$, но m — произвольное натуральное число. Так как (см. д. 1, п. 6, предл. 2)

$$A \setminus B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{m} Q_j = \bigcap_{j=1}^{m} (A \setminus Q_j)$$

и, как уже установлено, $A \setminus Q_j \in \mathfrak{R}^\nu$ (случай $n = m = 1$) при любом $j = 1, 2, \ldots, m$, то и пересечение $\bigcap_{j=1}^{m} (A \setminus Q_j)$, т. е. разность $A \setminus B$, входит в систему $\mathfrak{R}^\nu$.

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда натуральные числа n и m оба произвольны. Имеем

$$A \setminus B = \left(\bigcup_{k=1}^{n} P_k \right) \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} (P_k \setminus B).$$

Заметив, что, во-первых, множества $P_k \setminus B$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ так же, как и множества P_k, попарно не пересекаются, а во-вторых, что $P_k \setminus B \in \mathfrak{R}^\nu$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, заключаем на основании сделанного ранее замечания, что и в этом случае $A \setminus B \in \mathfrak{R}^\nu$.

Теперь легко проверить, что объединение $A \cup B$ множеств A, $B \in \mathfrak{R}^\nu$ входит в $\mathfrak{R}^\nu$. Действительно, как установлено, $B \setminus (A \cap B) \in \mathfrak{R}^\nu$, но объединение очевидно не пересекающихся множеств A и $B \setminus (A \cap B)$ из $\mathfrak{R}^\nu$ является элементом этой системы. Остается написать равенство $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$.

Таким образом доказано, что система $\mathfrak{R}^\nu$ — кольцо.

Убедиться в справедливости второй части теоремы совсем просто. В самом деле, возьмем какое-нибудь множество $A \in \mathfrak{R}^\nu$ и рассмотрим его регулярное представление (7). Система $\mathfrak{R}$ содержит все прямоугольники. В частности, $P_k \in \mathfrak{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Но $\mathfrak{R}$ — кольцо, следовательно, $\bigcup_{k=1}^{n} P_k = A \in \mathfrak{R}$. Итак, $\mathfrak{R}^\nu \subset \mathfrak{R}$, что и требовалось доказать.

Кольцо $\mathfrak{R}^\nu$ называют обычно *кольцом, порожденным системой* $\mathfrak{P}^\nu$.

Замечание 1. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{n}$, $P_k \in \mathfrak{P}^\nu$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольное конечное семейство прямоугольников (быть может, и пересекающихся). Поскольку $\mathfrak{R}^\nu$ — кольцо и $P_k \in \mathfrak{R}^\nu$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то и объединение $\bigcup_{k=1}^{n} P_k$ принадлежит к $\mathfrak{R}^\nu$, т. е. $\bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$, где $\{Q_j\}_{j=1}^{m}$ — семейство попарно не пересекающихся прямоугольников из системы $\mathfrak{P}^\nu$.

Замечание 2. Результат и доказательство теоремы остаются верными, если заменить систему $\mathfrak{P}^\nu$ произвольным полукольцом $\mathfrak{P}$ (см. 1.2) и под прямоугольниками подразумевать множества из системы $\mathfrak{P}$. О получившемся в этом случае кольце говорят, что оно *порождено полукольцом* $\mathfrak{P}$.

1.4. Хотя запас множеств, входящих в кольцо $\mathfrak{R}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, еще весьма беден, ими можно приблизить уже достаточно много множеств, в частности, любое открытое множество (теорема 2 (1.I)).

Дадим сначала общее определение.

Определение 1. Пусть имеется кольцо $\mathfrak{R}$ подмножеств множества R^ν. Множество S, содержащееся в R^ν, называется *σ-множеством* (относительно кольца $\mathfrak{R}$), если существует такое счетное семейство $\{A_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) множеств из кольца $\mathfrak{R}$, что $S = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

Систему $\mathfrak{S}$ всех σ-множеств будем называть *σ-системой, порожденной кольцом* $\mathfrak{R}$.

Замечание. В определении σ-множества под счетным семейством $\{A_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) всегда можно подразумевать последовательность, т. е. можно считать, если это необходимо, что Ξ представляет собой множество $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел. Действительно, поскольку множество индексов Ξ счетно, существует взаимно однозначное отображение φ множества $\mathbf{N}$ на множество Ξ. В силу коммутативности операции объединения (д. 1) можем написать

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_{\varphi(n)}.$$

Пусть S — некоторое σ-множество (относительно данного кольца $\mathfrak{R}$). Как только что было указано, существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, объединение которой совпадает с S. Обозначим $\tilde{A}_m = \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n$ ($m = 1, 2, \ldots$). Множества $\tilde{A}_m$ ($m = 1, 2, \ldots$) так же, как и A_n, принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$ и, кроме того, образуют возрастающую последовательность. Вместе с тем $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{A}_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = S$. Таким образом, всякое σ-множество допускает представление в виде объединения возрастающей последовательности множеств из данного кольца $\mathfrak{R}$.

Сказанное приводит нас к следующему определению.

Определение 2. Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств, принадлежащих кольцу $\mathfrak{R}$, образует *монотонное представление* σ-множества S, если она возрастает (т. е. $A_n \subset A_{n+1}$ при всех n ($n \in \mathbf{N}$)) и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = S$.

Как мы только что видели, всякое σ-множество допускает монотонное представление.

Пусть $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — монотонное представление данного σ-множества S. Введем множества

$$B_1 = A_1, \; B_k = A_k \setminus A_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Понятно, что все эти множества входят в кольцо $\mathfrak{R}$ и что $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. В отличие от множеств A_n ($n = 1, 2, \ldots$) множества B_k ($k = 1, 2, \ldots$) не имеют друг с другом общих элементов.

Определение 3. Последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ множеств, принадлежащих кольцу $\mathfrak{R}$, образует *дизъюнктное представление* σ-множества S, если $B_{k'} \cap B_{k''} = \Lambda$ при всех k', k'' (k', $k'' \in \mathbf{N}$, $k' \neq k''$) и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = S$.

Из сказанного перед этим определением следует, что каждое σ-множество допускает дизъюнктное представление.

Укажем некоторые свойства σ-множеств. В формулировках следующих далее предложений предполагается, что речь идет о σ-системе $\mathfrak{S}$, порожденной данным кольцом $\mathfrak{R}$.

Прежде всего отметим включение $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{R}$, которое вытекает из того, что, взяв $A_n = A$ ($n = 1, 2, \ldots$), где A — произвольное множество кольца $\mathfrak{R}$, мы получим $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, следовательно, $A \in \mathfrak{S}$.

Предложение 1. Пусть $\{S_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — не более чем счетное семейство σ-множеств. Объединение $S = \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Для каждого $\xi \in \Xi$ имеется последовательность $\{A_n^\xi\}_{n=1}^{\infty}$ множеств из кольца $\mathfrak{R}$, объединение которой есть S_ξ: $S_\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\xi$. Обозначив через $\mathbf{N}$ множество всех натуральных чисел, рассмотрим семейство $\{A_n^\xi\}$ ($(\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N}$). Произведение $\Xi \times \mathbf{N}$ — счетное множество (д. 1, п. 7), поэтому введенное семейство — счетно. Далее, согласно сказанному в д. 1, п. 6 (свойство 6):

$$S = \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi = \bigcup_{\xi \in \Xi} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n^\xi = \bigcup_{(\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N}} A_n^\xi.$$

Таким образом, S удовлетворяет требованиям определения и является, следовательно, σ-множеством.

Для пересечения σ-множеств справедлив лишь более слабый результат.

Предложение 2. Пусть S_1 и S_2 — σ-множества; рассмотрим какие-нибудь монотонные представления этих множеств:

$$S_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i \quad (i = 1, 2). \tag{10}$$

Пересечение $S_1 \cap S_2$ представляет собой σ-множество, для которого последовательность $\{A_n^1 \cap A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ образует монотонное представление.

Доказательство. Так как пересечение двух множеств из кольца принадлежит этому кольцу, то $A_n^1 \cap A_n^2 \in \mathfrak{R}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Поэтому для проверки справедливости утверждения достаточно установить равенство

$$S_1 \cap S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^1 \cap A_n^2). \tag{11}$$

Очевидно соотношение $S_1 \cap S_2 \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^1 \cap A_n^2)$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in S_1 \cap S_2$. Элемент x входит как в множество S_1, так и в множество S_2, следовательно, ввиду (10) можно указать такие номера k и m, что $x \in A_k^1$, $x \in A_m^2$. Обозначим через l наибольшее из чисел k и m. Так как представления (10) монотонные и k, $m \leqslant l$, то $A_k^1 \subset A_l^1$, $A_m^2 \subset A_l^2$. Следовательно, $x \in A_k^1 \cap A_m^2 \subset A_l^1 \cap A_l^2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^1 \cap A_n^2)$, что и завершает доказательство предложения.

Аналогичную структуру имеет и объединение σ-множеств S_1 и S_2. При тех же обозначениях, что и в предложении 2, имеет место следующее предложение.

Предложение 3. Последовательность $\{A_n^1 \cup A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ образует монотонное представление σ-множества $S_1 \cup S_2$.

Доказательство. Равенство $S_1 \cup S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^1 \cup A_n^2)$, как легко проверяется, вытекает из (10) даже без предположения о монотонности последовательностей $\{A_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$.

1.5. Рассмотрим σ-систему, порожденную кольцом $\mathfrak{R}^{\nu}$ ($\mathfrak{R}^{\nu}$ — наименьшее кольцо, содержащее полукольцо $\mathfrak{P}^{\nu}$; см. теорему 1 (1.I)). Эту σ-систему мы будем обозначать через $\mathfrak{S}^{\nu}$.

Пусть S — σ-множество. Согласно сказанному в п. 1.4, существует последовательность $\{A_k\}_{n=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся множеств из кольца $\mathfrak{R}^{\nu}$, объединение которой совпадает с S (дизъюнктное представление множества S). Но по теореме 1 (1.I) каждое множество A_n может быть записано в виде объединения конечного семейства попарно не пересекающихся прямоугольников:

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} P_k^n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Положим

$$P_k^n = \Lambda \quad (n = 1, 2, \ldots; \ k = m_n + 1, m_n + 2, \ldots).$$

Тогда равенство (12) можно переписать так:

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k^n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

т. е. каждое из множеств A_n представлено в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся прямоугольников (следует иметь в виду, что пустое множество — это тоже прямоугольник).

Следовательно (см. д. 1, п. 6, свойство 6),

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k^n \right) = \bigcup_{(n,\, k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} P_k^n, \tag{14}$$

где через $\mathbf{N}$, как всегда, обозначено множество всех натуральных чисел.

Множества P_k^n ($(n, k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$) попарно не пересекаются. В самом деле, если упорядоченные пары (n, k), $(n', k') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ различны, то в случае $n \neq n'$ прямоугольник $P_k^n \subset A_n$, а $P_{k'}^{n'} \subset A_{n'}$ и, значит, $P_k^n \cap P_{k'}^{n'} \subset A_n \cap A_{n'} = \Lambda$. Если же $n' = n$, то должно быть $k' \neq k$, и прямоугольники P_k^n и $P_{k'}^{n'}$ не имеют общих элементов потому, что они входят в представление (12) одного и того же множества $A_n = A_{n'}$.

Если заметить, что произведение $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ счетно (д. 1, п. 7), то равенство (14) показывает, что *каждое σ-множество (относительно кольца $\mathfrak{R}^{\nu}$ или, как мы будем говорить, относительно системы $\mathfrak{P}^{\nu}$) можно записать в виде объединения счетного семейства попарно не пересекающихся прямоугольников (размерности ν)*. Поскольку $\mathfrak{P}^{\nu} \subset \mathfrak{R}^{\nu}$, верно, конечно, и обратное: всякое множество S, представимое в виде объединения счетного семейства прямоугольников (хотя бы и имеющих общие друг с другом элементы), является σ-множеством.

Замечание 1. Соответствующий результат с необходимыми изменениями в формулировке верен и в том случае, когда вместо системы $\mathfrak{P}^{\nu}$

фигурирует произвольное полукольцо $\mathfrak{P}$. Кольцо $\mathfrak{R}^\nu$ должно быть заменено при этом кольцом $\mathfrak{R}$, порожденным системой $\mathfrak{P}$ (см. замечание 2 к теореме 1 (I. I)).

Хотя множеств, входящих в состав кольца $\mathfrak{R}^\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, сравнительно „немного", σ-система $\mathfrak{S}^\nu$ уже достаточно обширна. Именно, мы докажем, что каждое открытое множество пространства R^ν является элементом σ-системы $\mathfrak{S}^\nu$. Это следует из теоремы 2 (I. I), которая будет использована и в последующих главах. Чтобы сформулировать ее, введем некоторые новые понятия.

Определение 1. Пусть $P = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu)$ — элемент системы $\mathfrak{P}^\nu$. Если $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_\nu - a_\nu$, то прямоугольник P называют *полуоткрытым квадратом размерности* ν, число $b_1 - a_1$ — *длиной стороны квадрата* P, точку $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \ldots, \frac{a_\nu + b_\nu}{2}\right)$ — *центром квадрата* P.

Конечно, термин „квадрат" вполне уместен лишь при $\nu = 2$. В связи с этим напомним, что мы уже договорились применять „плоскую" терминологию, так что, скажем, употреблять слово „куб" вместо слова „квадрат" было бы непоследовательно (см. первую сноску на стр. 10).

Наряду с полуоткрытым можно, конечно, рассматривать открытые и замкнутые квадраты. Читатель без труда выскажет соответствующие определения.

Если P — полуоткрытый квадрат размерности ν с длиной стороны $2h$ $(h > 0)$, а $(c_1, c_2, \ldots, c_\nu)$ — его центр, то

$$P = [c_1 - h, c_1 + h) \times [c_2 - h, c_2 + h) \times \ldots \times [c_\nu - h, c_\nu + h).$$

Определение 2. Пусть имеется множество E пространства R^ν и прямоугольник $P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu)$. Будем говорить, что P содержится *строго внутри* E, если замыкание $\overline{P} \subset E$.

Исключая тривиальный случай, когда P — пустое множество, заметим, что замыкание $\overline{P}$ — это замкнутый прямоугольник с теми же вершинами, что и у данного прямоугольника P. Точнее говоря,

$$\overline{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu].$$

Теорема 2 (I.I). *Пусть G — открытое множество пространства R^ν. Существует счетное семейство $\{Q_\eta\}$ $(\eta \in H)$ попарно не пересекающихся полуоткрытых квадратов размерности ν, каждый из которых содержится строго внутри G, такое, что* $G = \bigcup\limits_{\eta \in H} Q_\eta$.

Доказательство. Пусть Z обозначает множество всех целых чисел, а K_ν (или, для краткости, просто K) — произведение $\overbrace{Z\times\ldots\times Z}^{\nu \text{ раз}}$. Возьмем какое-нибудь натуральное число j и рассмотрим семейство полуоткрытых квадратов размерности ν: $\{\Delta_k^j\}$ $(k\in K)$, где

$$\Delta^j_{(k_1,\ldots,k_\nu)}=\left[\frac{k_1}{2^j},\ \frac{k_1+1}{2^j}\right)\times\ldots\times\left[\frac{k_\nu}{2^j},\ \frac{k_\nu+1}{2^j}\right).$$

Квадраты Δ_k^j будем называть квадратами ранга j. Проверим, что семейство $\{\Delta_k^j\}$ $(k\in K)$ обладает следующими свойствами:

1) $\bigcup\limits_{k\in K}\Delta_k^j=R^\nu$; 2) $\Delta_{k'}^j\cap\Delta_{k''}^j=\Lambda$, если $k'\neq k''$, $k', k''\in K$,

т. е. что квадраты Δ_k^j при каждом $j\in\mathrm{N}$ заполняют все пространство R^ν и попарно не пересекаются. Докажем, что выполнено 1).

Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\in R^\nu$. Взяв какое-нибудь натуральное число $s\in\mathrm{N}_\nu^*$, рассмотрим произведение 2^jx_s. Среди целых чисел, не превосходящих 2^jx_s, найдется наибольшее (д. 1, п. 1); обозначим это число через k_s. Ясно, что $k_s+1>2^jx_s$, так что $k_s\leqslant 2^jx_s<k_s+1$, $\frac{k_s}{2^j}<x_s\leqslant\frac{k_s+1}{2^j}$, т. е. $x_s\in\left[\frac{k_s}{2^j},\ \frac{k_s+1}{2^j}\right)$, каково бы ни было $s\in\mathrm{N}_\nu$. Поэтому $x\in\left[\frac{k_1}{2^j},\ \frac{k_1+1}{2^j}\right)\times\ldots$ $\ldots\times\left[\frac{k_\nu}{2^j},\ \frac{k_\nu+1}{2^j}\right)=\Delta^j_{(k_1,\ldots,k_\nu)}$. Итак, для любой точки $x\in R^\nu$ мы сумели подобрать такой элемент $k=(k_1, \ldots, k_\nu)$ множества K, что $x\in\Delta_k^j$. Поэтому $\bigcup\limits_{k\in K}\Delta_k^j\supset R^\nu$, а так как включение $\bigcup\limits_{k\in K}\Delta_k^j\subset R^\nu$ очевидно, то 1) доказано.

Теперь докажем, что выполнено 2). Допустим, что $k', k''\in K$, $k'\neq k''$, $k'=(k_1', \ldots, k_\nu')$, $k''=(k_1'', \ldots, k_\nu'')$. Найдется натуральное число $s\in\mathrm{N}_\nu$ такое, что $k_s'\neq k_s''$ (в противном случае k' и k'' совпадали бы). Предположим, что $k_s'<k_s''$. Если $x\in\Delta_{k'}\cap\Delta_{k''}$, $x=(x_1, \ldots, x_\nu)$, то, очевидно, выполняются неравенства: $k_s'\leqslant 2^jx_s<k_s'+1$, $k_s''\leqslant 2^jx_s<k_s''+1$. Но это невозможно, ибо тогда оказалось бы, что $k_s''<k_s'+1$, вопреки неравенству $k_s'<k_s''$. Итак, множество $\Delta_{k'}\cap\Delta_{k''}$ не может содержать ни одной точки, и 2) доказано.

Теперь проверим, что справедливо следующее утверждение: 3) если j, j' — натуральные числа и если $j'<j$, то любой квадрат ранга j содержится в единственном квадрате ранга j'. Точнее: для любого $k\in K$ найдется единственный элемент $k'\in K$, такой, что $\Delta_k^j\subset\Delta_{k'}^{j'}$. В самом деле, пусть $k=(k_1, \ldots$

* Символом N_ν обозначается множество $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ (см. д. 1, п. 1).

$\ldots, k_\nu) \in K$, $s \in \mathrm{N}_\nu$. Пусть k'_s — наибольшее из целых чисел, не превосходящих числа $2^{j'-j}k_s$. Тогда $k'_s \leqslant 2^{j'-j}k_s < k'_s + 1$, $\frac{k'_s}{2^{j'}} \leqslant \frac{k_s}{2^j} < \frac{k'_s+1}{2^{j'}}$. Из неравенства $k_s < 2^{j-j'}\,(k'_s + 1)$ следует, что $k_s + 1 \leqslant 2^{j-j'}\,(k'_s + 1)$, так что $\frac{k_s+1}{2^j} \leqslant \frac{k'_s+1}{2^{j'}}$. Поэтому $\left[\frac{k_s}{2^j}, \frac{k_s+1}{2^j}\right) \subset \left[\frac{k'_s}{2^{j'}}, \frac{k'_s+1}{2^{j'}}\right)$ при всех $s \in N_\nu$, т. е. $\Delta_k^j \subset \Delta_{k'}^{j'}$. Если бы включение $\Delta_k^j \subset \Delta_{k''}^{j'}$ выполнялось при $k'' \neq k'$ $(k'' \in K)$, то пересечение $\Delta_{k''}^{j'} \cap \Delta_{k'}^{j'}$ было бы непустым, вопреки утверждению 2). Утверждение 3) доказано.

Пусть теперь K_1 — множество, состоящее из всех $k \in K$, таких, что квадрат Δ_k^1 строго содержится в G. Символом K_2 обозначим множество, состоящее из всех $k \in K$, таких, что квадрат Δ_k^2 строго содержится в G и не содержится ни в одном из квадратов Δ_k^1 с $k \in K_1$. Предполагая, что множества $K_1, \ldots, K_n$ уже определены, построим множество K_{n+1}, состоящее из всех $k \in K$, таких, что квадрат Δ_k^{n+1} строго содержится в G и не содержится ни в одном из квадратов вида Δ_k^j, где $k \in K_j$, $j \leqslant n$. Проверим, что $G = \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \in K_j} \Delta_k^j$.

Включение $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \in K_j} \Delta_k^j \subset G$ очевидно. Докажем, что $G \subset \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \in K_j} \Delta_k^j$. Пусть $x \in G$. Ввиду того что G открыто, найдется положительное число $\varepsilon > 0$, такое, что* $D^\nu(x, \varepsilon) \subset G$. Выберем число $j \in \mathrm{N}$ столь большим, что $\frac{\sqrt{\nu}}{2^j} < \varepsilon$. Из утверждения 1), доказанного выше, следует, что точка x принадлежит некоторому квадрату Δ_k^j ранга j. Легко видеть, что $\operatorname{diam} \overline{\Delta}_k^j = \frac{\sqrt{\nu}}{2^j}$. Поэтому $\overline{\Delta}_k^j \subset D^\nu(x, \varepsilon)$ и, стало быть, строго содержится в G. Итак, множество Z_x всех натуральных j, таких, что x содержится в некотором квадрате ранга j, строго содержащемся в G, непусто. Пусть же $j(x)$ — наименьшее из чисел, содержащихся в Z_x (см. д. 1, п. 1). Пусть $k(x)$ — тот элемент множества K, при котором $x \in \Delta_{k(x)}^{j(x)}$ (см. 1) и 2)). Проверим, что $k(x) \in K_{j(x)}$. В самом деле, $\overline{\Delta}_{k(x)}^{j(x)} \subset G$. Вместе с тем $\Delta_{k(x)}^{j(x)}$ не содержится ни в каком квадрате вида Δ_k^j, где $k \in K_j$,

* Символом $D^\nu(x, \varepsilon)$ обозначается открытый шар в пространстве R^ν с центром в точке x и радиусом ε (см. д. 3, п. 1).

$j<j(x)$, ибо в противном случае число j принадлежало бы множеству Z_x, хотя $j(x)$ — наименьший элемент этого множества. Значит, $k(x) \in K_{j(x)}$.

Итак, для любой точки $x \in G$ можно подобрать число $j(x) \in \mathrm{N}$ и элемент $k(x)$ множества K так, что $x \in \Delta_{k(x)}^{j(x)}$ и тем более $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \in K_j} \Delta_k^j$. Поэтому $G \subset \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \in K_j} \Delta_k^j$, и равенство $G = \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k \in K_j} \Delta_k^j$ доказано.

Пусть теперь $H = \mathrm{N} \times K$. Множество H счетно как произведение двух счетных множеств (д. 1, п. 7, предл. 2). Пусть $\eta = (j, k)$, где $j \in \mathrm{N}$, $k \in K$, так что $\eta \in H$. Положим $Q_\eta = \Delta_k^j$, если $k \in K_j$, $Q_\eta = \Lambda$, если $k \overline{\in} K_j$.

Семейство квадратов $\{Q_\eta\}$ $(\eta \in H)$ — как раз то самое семейство, существование которого утверждалось в теореме. Чтобы убедиться в этом, нужно проверить лишь, что $Q_{\eta'} \cap Q_{\eta''} = \Lambda$ при $\eta' \neq \eta''$ $(\eta', \eta'' \in H)$. Пусть же $\eta' = (j', k')$, $\eta'' = (j'', k'')$, $\eta' \neq \eta''$. Если $k' \overline{\in} K_{j'}$, или $k'' \overline{\in} K_{j''}$, то равенство $Q_{\eta'} \cap Q_{\eta''} = \Lambda$ очевидно. Если $j' = j''$, то $Q_{\eta'} \cap Q_{\eta''} = \Delta_{k'}^{j'} \cap \Delta_{k''}^{j'} = \Lambda$ в силу свойства 2) квадратов ранга j', ибо $k' \neq k''$. Предположим, что $j' \neq j''$, пусть, например, $j' < j''$. Тогда, в силу свойства 3), из того, что $\Delta_{k'}^{j'} \cap \Delta_{k''}^{j''} \neq \Lambda$, следовало бы, что $\Delta_{k''}^{j''} \subset \Delta_{k'}^{j'}$. Но это невозможно, ибо $k'' \in K_{j''}$, и потому квадрат $\Delta_{k''}^{j''}$ не может содержаться в квадрате $\Delta_{k'}^{j'}$: ведь этот последний квадрат строго содержится в G, а $j' < j''$.

Доказательство закончено.

Замечание. Можно доказать, что если $G \neq \Lambda$, то множество всех членов семейства $\{Q_\eta\}$ $(\eta \in H)$ непременно бесконечно (счетно).

1.6. Рассмотрим σ-систему $\mathfrak{S}$ (порожденную некоторым кольцом) с точки зрения выполнимости в ней тех или иных теоретико-множественных операций. В этом смысле свойства σ-системы напоминают свойства кольца: не выходя за пределы $\mathfrak{S}$, можно образовывать объединения счетных (и конечных) семейств множеств, принадлежащих $\mathfrak{S}$ (см. п. 1.4, предл. 1).

Введением σ-системы мы сразу добиваемся того, что разнообразные множества, естественно возникающие в геометрии, оказываются элементами нашей системы (отметим, что даже такое простое множество, как открытый круг, не принадлежит кольцу $\mathfrak{R}^2$, но уже принадлежит σ-системе, порожденной этим кольцом).

Обратимся теперь к операции пересечения. Предложение 2 из п. 1.4 гарантирует, что пересечение двух и, понятно, любого конечного семейства множеств из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

Большего, однако, сказать нельзя. Пересечение бесконечного, хотя бы и счетного, семейства множеств из $\mathfrak{S}$ может и не быть элементом этой системы. Действительно, понимая под $\mathfrak{S}$ σ-систему $\mathfrak{S}^{\nu}$(см. п. 1.5), рассмотрим последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ прямоугольников

$$P_n = \underbrace{\left[0, \frac{1}{n}\right) \times \left[0, \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left[0, \frac{1}{n}\right)}_{\nu \text{ раз}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что эти прямоугольники входят в состав σ-системы $\mathfrak{S}^{\nu}$. Образуем пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Оно состоит, очевидно, из одной единственной точки $(0, 0, \ldots, 0)$ и потому не может принадлежать σ-системе $\mathfrak{S}$, так как всякое непустое множество этой системы должно содержать хоть один непустой полуоткрытый прямоугольник, следовательно, должно иметь внутренние точки, которых нет у пересечения $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.

Отмеченный недостаток понятия σ-системы затрудняет использование σ-систем. Предпочтительнее оказывается рассмотрение таких систем, по отношению к которым операции объединения и пересечения равноправны.*

Дадим соответствующее определение.

Определение 1. Рассмотрим систему $\mathfrak{K}$ подмножеств множества R^{ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Система $\mathfrak{K}$ называется *σ-кольцом*, если она обладает следующими свойствами:

1) пустое множество входит в $\mathfrak{K}$;

2) каково бы ни было не более чем счетное (д. 1, п. 7) семейство $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств системы $\mathfrak{K}$, выполняется соотношение $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi \in \mathfrak{K}$;

3) если множества E_1 и E_2 принадлежат $\mathfrak{K}$, то и $E_1 \setminus E_2 \in \mathfrak{K}$.

Таким образом, в отличие от определения кольца (п. 1.3) здесь требуется замкнутость системы по отношению к операции объединения не более чем счетных семейств, а не только конечных.

Определение 2. Если σ-кольцо $\mathfrak{K}$ включает наибольшее множество, т. е. такое множество X, которое содержит все остальные множества из $\mathfrak{K}$, то система $\mathfrak{K}$ называется *σ-алгеброй* (в множестве X). Иными словами, σ-кольцо $\mathfrak{K}$ является σ-алгеброй, если $\bigcup\limits_{E \in \mathfrak{K}} E \in \mathfrak{K}$.

---

* Закономерен вопрос: если понятие σ-системы неудовлетворительно, то зачем вообще его вводить? Не лучше ли сразу ввести понятие, лишенное указанных в тексте недостатков, вроде σ-кольца или σ-алгебры, определения которых даются ниже?

Дело здесь, однако, в том, что σ-системы, не имея, действительно, самостоятельного значения, играют вместе с тем большую роль в процессе построения конкретных σ-колец и σ-алгебр (см. § 3 настоящей главы).

Содержательным примерам σ-колец и σ-алгебр посвящен, по существу, § 3. Здесь же мы укажем лишь на более или менее тривиальные примеры.

Система всех подмножеств множества R^ν ($\nu=1, 2, \ldots$) очевидным образом является σ-кольцом и, конечно, σ-алгеброй.

Система всех не более чем счетных подмножеств множества R^ν ($\nu=1, 2, \ldots$) будет σ-кольцом, но, понятно, не σ-алгеброй. Рассмотрим более сложный пример. Пусть E_0 — данное подмножество множества R^ν ($\nu=1, 2, \ldots$). Через $\mathfrak{K}$ обозначим систему всех таких подмножеств E множества R^ν, что либо $E \supset E_0$, либо $E \cap E_0 = \Lambda$. Предоставляем читателю проверку того, что система $\mathfrak{K}$ является σ-алгеброй.

Каждое σ-кольцо и, в частности, каждая σ-алгебра будет, само собой разумеется, и кольцом. Обратное заключение неверно. Например, легко указать последовательность элементов кольца $\mathfrak{R}^\nu$, объединение которых уже не принадлежит этому кольцу.

Всякое σ-кольцо замкнуто не только по отношению к операции объединения не более чем счетных семейств, но и по отношению к операции пересечения таких семейств (ср. п. 1.3).

Предложение 1. Если $\mathfrak{K}$ — σ-кольцо и $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — не более чем счетное семейство множеств, ему принадлежащих, то $E = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi \in \mathfrak{K}$.

Доказательство. Обозначим через A объединение $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$. По определению σ-кольца, $A \in \mathfrak{K}$. Также из определения вытекает, что $\mathfrak{K}$ включает разность $E'_\xi = A \setminus E_\xi$ ($\xi \in \Xi$). Следовательно (см. д. 1, п. 6), множество $E' = A \setminus E = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E'_\xi$ входит в $\mathfrak{K}$ как объединение не более чем счетного семейства множеств E'_ξ из $\mathfrak{K}$. Но раз $E' \in \mathfrak{K}$, то системе $\mathfrak{K}$ будет принадлежать разность $A \setminus E'$, которая, очевидно, совпадает с $E = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$.

1.7. Если в качестве аппарата для изучения систем множеств используют простейшие теоретико-множественные операции (объединение и пересечение не более чем счетных семейств, разность), то наиболее удобными с этой точки зрения системами будут σ-кольца. В связи с этим целесообразным оказывается вопрос: нельзя ли данную систему $\mathfrak{C}$ подмножеств множества R^ν ($\nu=1, 2, \ldots$) расширить, присоединив к ней новые множества, так, чтобы получить σ-кольцо? При такой постановке вопроса ответ на него (положительный) очевиден: σ-кольцо всех подмножеств множества R^ν является искомым расширением. Однако понятно, что это расширение в большинстве случаев не самое экономное, что, вообще говоря, возможны и другие σ-кольца, охватывающие данную систему $\mathfrak{C}$.

Теорема 3(1.I). *Пусть $\mathfrak{C}$ — система подмножеств множества R^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$). Существует единственное σ-кольцо $\mathfrak{R}_0$, содержащее систему $\mathfrak{C}$ и обладающее тем свойством, что всякое σ-кольцо подмножеств множества R^ν, содержащее систему $\mathfrak{C}$, содержит и σ-кольцо $\mathfrak{R}_0$.*

Система $\mathfrak{R}_0$ называется *σ-кольцом, порожденным системой* $\mathfrak{C}$, и является наименьшим σ-кольцом, содержащим систему $\mathfrak{C}$.

Доказательство. Обозначим через $\sum$ множество всех σ-колец (состоящих из подмножеств множества R^ν), которые содержат данную систему $\mathfrak{C}$. $\sum$ — непустое множество, так как в него входит, например, σ-кольцо всех подмножеств множества R^ν. Образуем пересечение $\mathfrak{R}_0 = \bigcap\limits_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R}$. Легко проверить, что система $\mathfrak{R}_0$ удовлетворяет всем требованиям определения σ-кольца. Остановимся для примера на условии 2). Рассмотрим не более чем счетное семейство $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) множеств системы $\mathfrak{R}_0$. Если $\mathfrak{R} \in \sum$, то, очевидно, $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$; поэтому $E_\xi \in \mathfrak{R}$ ($\xi \in \Xi$). Но, по условию, система $\mathfrak{R}$ — σ-кольцо. Следовательно, объединение $E = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$ принадлежит $\mathfrak{R}$. Таким образом, множество E входит в состав каждой системы $\mathfrak{R} \in \sum$. Значит, $E \in \bigcap\limits_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$.

Остальные условия проверяются аналогично.

Тот же прием может быть использован для доказательства соотношения $\mathfrak{R}_0 \supset \mathfrak{C}$.

То, что $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R} \in \sum$), уже отмечалось выше.

Если $\mathfrak{R}_1$ — σ-кольцо, обладающее теми же свойствами, что и построенная система $\mathfrak{R}_0$, то, поскольку $\mathfrak{R}_1 \in \sum$, должно быть $\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_0$. С другой стороны, раз $\mathfrak{R}_1$ — наименьшее из σ-колец, содержащих систему $\mathfrak{C}$, справедливо и обратное включение: $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_0$.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Такие же рассуждения позволяют доказать теорему, в которой устанавливается существование и единственность наименьшей σ-алгебры или кольца, содержащего данную систему. Обратим внимание, что в одном частном случае подобная теорема была уже доказана нами ранее (теорема 1). В ней, впрочем, было доказано не только существование наименьшего кольца, содержащего систему $\mathfrak{P}^\nu$, но и выяснена его структура, что затруднительно сделать в общем случае.

Определение 1. σ-кольцо $\mathfrak{B}^\nu$, порожденное системой $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), называется обычно *борелевским σ-кольцом пространства* R^ν, а множества, входящие в состав $\mathfrak{B}^\nu$, — *борелевскими*.

Структура σ-кольца $\mathfrak{B}^{\nu}$ чрезвычайно сложна, и не существует сколько-нибудь простой конструкции, с помощью которой можно было бы охарактеризовать все борелевские множества. Попытаемся дать некоторое представление об имеющихся здесь трудностях.

Заметим прежде всего, что, по самому определению, σ-кольцо $\mathfrak{B}^{\nu}$ содержит систему $\mathfrak{P}^{\nu}$, что можно высказать и так: каждый полуоткрытый прямоугольник представляет собой борелевское множество. Далее, поскольку $\mathfrak{B}^{\nu}$ — σ-кольцо, оно должно включать в себя объединение любого счетного семейства борелевских множеств. В частности, все σ-множества (порожденные системой $\mathfrak{P}^{\nu}$ — см. п. 1.5) оказываются борелевскими. Отсюда с помощью теоремы 2 (1.I) вытекает, что всякое открытое множество пространства R^{ν}, будучи σ-множеством, является тем самым борелевским. Так как само множество R^{ν} открыто в пространстве R^{ν}, то указанное обстоятельство позволяет заключить, что система $\mathfrak{B}^{\nu}$ является не только σ-кольцом, но и σ-алгеброй (п. 1.6).

Далее, любое замкнутое множество F пространства R^{ν} является дополнением некоторого соответствующего ему открытого множества G, т. е. разностью $R^{\nu} \setminus G$. Ввиду того, что оба множества — R^{ν} и G — борелевские, а система $\mathfrak{B}^{\nu}$ — σ-кольцо, это приводит к выводу, что F принадлежит σ-кольцу $\mathfrak{B}^{\nu}$.

Таким образом, если обозначить через $\mathfrak{G}^{\nu}$ систему всех открытых, а через $\mathfrak{F}^{\nu}$ — систему всех замкнутых множеств пространства R^{ν}, то установленные выше факты можно коротко записать в виде $\mathfrak{G}^{\nu} \subset \mathfrak{B}^{\nu}$, $\mathfrak{F}^{\nu} \subset \mathfrak{B}^{\nu}$.

Применяя к открытым или замкнутым множествам операции объединения или пересечения счетных семейств, мы не выйдем за пределы σ-кольца $\mathfrak{B}^{\nu}$, и вместе с тем построим множества, которые, как правило, не будут ни открытыми, ни замкнутыми.

Определение 2. Подмножество A множества R^{ν} ($\nu = 1, 2, \ldots$) называется *множеством типа* G_{δ}, если существует такое счетное семейство $\{G_{\xi}\}$ ($\xi \in \Xi$) открытых множеств пространства R^{ν}, что $A = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} G_{\xi}$. Множество $B \subset R^{\nu}$ называется *множеством типа* F_{σ}, если существует счетное семейство $\{F_{\xi}\}$ ($\xi \in \Xi$) замкнутых множеств пространства R^{ν}, объединение которого совпадает с B: $B = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} F_{\xi}$.*

* Поскольку, как известно, объединение любого семейства открытых множеств открыто, а пересечение замкнутых — замкнуто, не имеет смысла вводить понятия множеств типа G_{σ} и F_{δ}.

Обозначим через $\mathfrak{G}_\delta^\nu$ и $\mathfrak{F}_\sigma^\nu$ систему всех множеств типа G_δ и F_σ соответственно. Как ясно из сказанного выше, $\mathfrak{G}_\delta^\nu$, $\mathfrak{F}_\sigma^\nu \subset \mathfrak{B}^\nu$. Если аналогичным образом ввести системы $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}^\nu$, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}^\nu$, то по соображениям, подобным тем, которые использовались выше, будет $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}^\nu$, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}^\nu \subset \mathfrak{B}^\nu$.

Применяя поочередно операции объединения и пересечения счетных семейств множеств, можно образовать системы с большим, чем два, числом индексов. Важно при этом иметь в виду, что, как можно доказать, на каждом шагу будут получаться все более широкие системы. Все построенные таким образом множества будут борелевскими, но, как оказывается, σ-кольцо $\mathfrak{B}^\nu$ далеко не исчерпывается только такими множествами.

В заключение заметим, что хотя σ-кольцо $\mathfrak{B}^\nu$ и не исчерпывается указанными множествами, но все-таки верно следующее предложение.

Предложение 1. $\mathfrak{B}^\nu$ есть наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathfrak{G}^\nu$.

Доказательство. Обозначим символом $\mathfrak{A}^\nu$ σ-кольцо, порожденное системой $\mathfrak{G}^\nu$. Так как $\mathfrak{G}^\nu \subset \mathfrak{B}^\nu$, то в силу определения (см. теорему 3 (1.I)) $\mathfrak{A}^\nu \subset \mathfrak{B}^\nu$. Докажем теперь, что $\mathfrak{B}^\nu \subset \mathfrak{A}^\nu$. В самом деле, каждый полуоткрытый прямоугольник $P \in \mathfrak{P}^\nu$ является пересечением последовательности открытых прямоугольников, которую читатель легко построит самостоятельно. Следовательно, $P \in \mathfrak{A}^\nu$ и, значит, $\mathfrak{P}^\nu \subset \mathfrak{A}^\nu$. Теперь, снова применяя определение (см. теорему 3(1.I)), получаем $\mathfrak{B}^\nu \subset \mathfrak{A}^\nu$. Предложение полностью доказано.

Нетрудно доказать также следующее утверждение:

Предложение 2. σ-кольцо, порожденное системой $\mathfrak{F}^\nu$, совпадает с $\mathfrak{B}^\nu$.

§ 2. Аддитивные функции множества

В математике нет единого понимания термина «мера». Однако все известные определения этого понятия предполагают у нее свойство аддитивности и отличаются одно от другого лишь дополнительными требованиями, которые играют в теории меры менее существенную роль по сравнению с аддитивностью.

Хотя свойством аддитивности могут обладать функции, область задания которых и не является системой множеств (как, например, вероятность — функция, заданная на множестве событий), мы ограничимся изучением исключительно аддитивных функций множества, т. е. функций, заданных на той или иной системе множеств и, более того, на системе подмножеств множества R^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$). Впрочем, последнее обстоятельство в подавляющем большинстве случаев не отражается сколько-нибудь заметным образом ни на формулировке фактов, ни на их доказательстве.

Не лишне указать, что мы рассматриваем комплекснозначные функции, все значения которых конечны. Если же речь идет о вещественной функции (это всегда надлежащим образом оговаривается), то для нее допускаются и бесконечные значения $+\infty$ или $-\infty$. Мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого в тексте, что среди значений вещественной функции множества имеется хоть одно конечное.

Добавим еще, что для записи значения функции множества мы, как правило, не будем применять скобки, т. е. значения функции μ на множестве E, входящем в область ее задания, будут обозначаться μE.

Изложение в этом параграфе существенным образом опирается на материал добавления 2. Соответствующие ссылки приводятся в тексте только в наиболее сложных случаях.

2.1. Начнем с точного определения аддитивной функции множества.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{E}$ — система подмножеств множества R^ν $(\nu=1, 2, \ldots)$ и μ — функция (комплексная или вещественная), заданная на $\mathfrak{E}$ (д. 1, п. 4). Она называется аддитивной, если каково бы ни было конечное семейство E_1, E_2, ..., E_n попарно не пересекающихся множеств, принадлежащих системе $\mathfrak{E}$, такое, что объединение $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ также входит в $\mathfrak{E}$, то сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu E_k$ имеет смысл* и $\mu E=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu E_k$.

Предложение 1. Пусть μ — аддитивная функция множества, заданная на системе $\mathfrak{E}$ подмножеств множества R^ν $(\nu=1, 2, \ldots)$. Предположим, что пустое множество принадлежит системе $\mathfrak{E}$. Тогда $\mu\Lambda=0$.

Доказательство. Действительно, в системе $\mathfrak{E}$ имеется множество E, которому соответствует конечное значение μE. Так как $E\cup\Lambda=E$, причем множества E и Λ не пересекаются, то вследствие аддитивности функции μ можно написать $\mu E= =\mu E+\mu\Lambda$, что возможно лишь при условии $\mu\Lambda=0$.

Отметим еще одно свойство аддитивной функции μ, называемое *субтрактивностью*.

Предложение 2. Пусть, как и выше, область определения функции μ обозначена через $\mathfrak{E}$. Возьмем множества E_1, $E_2\in\mathfrak{E}$, такие, что $E_1\subset E_2$. Предположим, кроме того, что

---

* Эта предосторожность относится к тому случаю, когда функция μ, будучи вещественной, принимает бесконечные значения разных знаков. (Об операции сложения в $\overline{R}$ см. д. 1, п. 1.)

$E = E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{C}$. Тогда если хотя бы одно из чисел μE_1, μE_2 — конечно, то справедливо равенство

$$\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu E_2 - \mu E_1.$$

Доказательство. Действительно, в данном случае $E_1 \cup E = E_2$, причем множества E_1 и E не пересекаются. Следовательно, по аддитивности функции μ будет $\mu E_2 = \mu E_1 + \mu E$. Если μE_1 конечно, отсюда сразу же вытекает доказываемый факт. Соотношение же $\mu E_1 = \pm\infty$ невозможно, так как оно влечет бесконечность значения μE_2 (так как $\mu E_1 + \mu E$ имеет смысл), что не допускается условиями предложения.

Рассмотрим несколько примеров аддитивных функций.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{C}$ — система всех подмножеств множества R^ν ($\nu = 1, 2, \dots$) и x_0 — данный элемент множества R^ν. Функцию μ определим, полагая

$$\mu E = \begin{cases} 1 & (x_0 \in E) \\ 0 & (x_0 \overline{\in} E) \end{cases} \quad (E \in \mathfrak{C}).$$

Аддитивность функции μ проверяется без труда. Пусть E_1, E_2, ..., E_n — конечное семейство попарно не пересекающихся множеств системы $\mathfrak{C}$, т. е., проще говоря, попарно не пересекающихся подмножеств множества R^ν, и $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Если $x_0 \in E$, то среди чисел $k = 1, 2, \dots, n$ имеется одно (обозначим его через k_0) такое, что $x_0 \in E_{k_0}$. Поскольку множества E_1, E_2, ..., E_n попарно не имеют общих элементов, $x_0 \overline{\in} E_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $k \neq k_0$). Таким образом, $\mu E = \mu E_{k_0} = 1$, а $\mu E_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $k \neq k_0$). Следовательно, $\mu E = \sum_{k=1}^{n} \mu E_k$. Это равенство справедливо и в том случае, когда $x_0 \overline{\in} E$, так как тогда обе его части очевидным образом равны нулю.

Следующий пример является обобщением предыдущего.

Пример 2. Будем под $\mathfrak{C}$ опять понимать систему всех подмножеств множества R^ν ($\nu = 1, 2, \dots$). Пусть далее Ξ — не более чем счетное множество, содержащееся в R^ν. Рассмотрим суммируемое числовое семейство $\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) (д. 2, п. 1). Если E — некоторое подмножество множества R^ν, т. е. если $E \in \mathfrak{C}$, то семейство $\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Xi \cap E$) суммируемо (д. 2, п. 2). Функцию μ определим на $\mathfrak{C}$, принимая для $E \in \mathfrak{C}$

$$\mu E = \sum_{\xi \in \Xi \cap E} p_\xi.$$

Аддитивность функции μ вытекает из свойства ассоциативности суммы числового семейства (д. 2, п. 1, предл. 3). В самом деле, если $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ и множества E_1, E_2, ..., E_n попарно не пересекаются, то $\Xi \cap E = \bigcup_{k=1}^{n} (\Xi \cap E_k)$, причем множества $\Xi \cap E_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ также попарно не пересекаются. Поэтому, согласно цитированному предложению,

$$\mu E = \sum_{\xi \in \Xi \cap E} p_\xi = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\xi \in \Xi \cap E_k} p_\xi \right) = \sum_{k=1}^{n} \mu E_k.$$

Если семейство $\{p_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ положительно, т. е. все числа $p_\xi \geqslant 0$ $(\xi \in \Xi)$, то требование суммируемости может быть опущено. Разумеется, вещественная функция μ, соответствующая этому случаю, может иметь бесконечные значения.

Функция μ, когда семейство $\{p_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ положительно, имеет простой физический смысл. Предположим, что в каждой точке множества Ξ помещена масса, величина которой в точке $\xi \in \Xi$ равна p_ξ. Тогда $\mu E (E \in \mathfrak{E})$ дает массу, сосредоточенную на множестве E.

В связи с этой физической интерпретацией функцию μ рассматриваемого примера называют *дискретным распределением массы*, а число p_ξ $(\xi \in \Xi)$ — *нагрузкой в точке* ξ. Эту терминологию используют и тогда, когда числа p_ξ могут быть не положительными и даже комплексными.

Заметим, что функция μ первого примера представляет собой дискретное распределение массы, в котором в роли Ξ выступает одноэлементное множество $\{x_0\}$, и нагрузка p_{x_0} в точке x_0 равна единице.

Рассмотрим более содержательный пример аддитивной функции множества.

Пример 3. Пусть Δ — данный промежуток расширенной числовой прямой $\overline{R}$.* Через $\mathfrak{P}_\Delta$ обозначим систему всех таких полуоткрытых промежутков $[\alpha, \beta)$ $(\alpha \leqslant \beta)$, что $\alpha, \beta \in \Delta$.** Предположим еще, что на промежутке Δ определена конечная функция g. Для произвольного $P = [\alpha, \beta) \in \mathfrak{P}_\Delta$ положим

$$\mu P = g(\beta) - g(\alpha). \tag{1}$$

Докажем, что определенная этим равенством на системе $\mathfrak{P}_\Delta$ функция множества μ аддитивна.

Пусть промежутки $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathfrak{P}_\Delta$ и попарно не пересекаются. Обозначим через P их объединение: $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$, и до-

---

* Напомним, что под расширенной числовой прямой мы понимаем множество всех вещественных чисел, включая и несобственные числа $+\infty$, $-\infty$ (см. д. 1, п. 1).

** Как отмечалось в п. 1.2 гл. I, система $\mathfrak{P}_\Delta$ представляет собой полукольцо.

пустим, что множество P также является промежутком из системы $\mathfrak{P}_\Delta$. Требуется убедиться в справедливости равенства

$$\mu P = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k. \tag{2}$$

Если какой-нибудь из промежутков P_k ($k=1, 2, \ldots, n$) пустой, то вследствие (1) $\mu P_k = 0$. Поэтому, доказывая равенство (2), можно ограничиться случаем, когда ни один из промежутков P_k ($k=1, 2, \ldots, n$) не пуст. Понятно, что тогда непустым будет и промежуток P. Пусть $P=[\alpha, \beta)$, $P_k = [\alpha_k, \beta_k)$ ($k=1, 2, \ldots, n$). Можно считать, что промежутки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ перенумерованы так, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$. Нетрудно видеть, что при этом $\alpha = \alpha_1$. В самом деле, $\alpha_1 \in P_1 \subset P$, так что $\alpha \leqslant \alpha_1 < \beta$. С другой стороны, $\alpha \in P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$. Следовательно, можно указать такое натуральное число $k_0 \leqslant n$, что $\alpha \in P_{k_0}$, а это в свою очередь приводит к неравенству $\alpha \geqslant \alpha_{k_0} \geqslant \alpha_1$. Далее, почти очевидно, что $\beta_1 \leqslant \beta$, поскольку из противоположного неравенства $\beta_1 > \beta$ вытекало бы $\beta \in P_1 \subset P$, что абсурдно.

Так как промежутки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ попарно не имеют общих элементов, то $P \setminus P_1 = \bigcup_{k=2}^{n} P_k$. Но из сказанного выше вытекает, что $P \setminus P_1 = [\alpha, \beta) \setminus [\alpha, \beta_1) = [\beta_1, \beta)$. Таким образом, $[\beta_1, \beta) = \bigcup_{k=2}^{n} P_k$, и мы оказываемся в ситуации, подобной начальной, с той, однако, разницей, что число промежутков, участвующих в объединении, стало на единицу меньше. Повторяя проведенное только что рассуждение, мы установим последовательно равенства $\beta_1 = \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_3$, $\ldots$, $\beta_{n-2} = \alpha_{n-1}$ и в конце концов придем к соотношению $[\beta_{n-1}, \beta) = \bigcup_{k=n}^{n} P_k = P_n = [\alpha_n, \beta_n)$, которое дает $\beta_{n-1} = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$. Вводя обозначение $\beta_n = \alpha_{n+1}$, можем окончательно записать

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta_k = \alpha_{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Учитывая определение (1) функции μ и равенства (3), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} \mu P_k = \sum_{k=1}^{n} [g(\beta_k) - g(\alpha_k)] = \sum_{k=1}^{n} [g(\alpha_{k+1}) - g(\alpha_k)] = g(\alpha_{n+1}) - g(\alpha_1) = g(\beta) - g(\alpha) = \mu P,$$

и равенство (2) доказано.

Интересно отметить, что имеется и обратная связь между конечными аддитивными функциями множества, заданными на системе $\mathfrak{P}_\Delta$, и „обычными“ функциями, определенными на промежутке Δ, как видно из следующего предложения.

Предложение 3. Если μ — функция множества указанного вида, то существует функция g, определенная на промежутке Δ, связанная с μ соотношением (1).

Доказательство. Выберем число $x_0 \in \Delta$ и примем

$$g(x) = \begin{cases} \mu\,[x_0,\ x) & (x \geqslant x_0), \\ -\mu\,[x,\ x_0) & (x < x_0) \end{cases} \quad (x \in \Delta). \tag{4}$$

Если $P = [\alpha,\ \beta) \in \mathfrak{P}_\Delta$, т. е. если числа α, $\beta \in \Delta$ и $\alpha \leqslant \beta$, то в случае, когда $x_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, в соответствии с (4) можем написать, учитывая при этом свойство субтрактивности аддитивной функции,

$$\mu P = \mu\,([x_0,\ \beta) \setminus [x_0, \alpha)) = \mu\,[x_0,\ \beta) - \mu\,[x_0,\ \alpha) = g(\beta) - g(\alpha).$$

Если $\alpha < x_0 \leqslant \beta$, то аналогичным образом из равенства $P = [\alpha,\ x_0) \cup [x_0,\ \beta)$ вытекает $\mu P = \mu\,[\alpha,\ x_0) + \mu[x_0,\ \beta) = g\,(\beta) - g\,(\alpha)$.

Наконец, когда $\alpha \leqslant \beta < x_0$, то соотношение

$$P = [\alpha,\ x_0) \setminus [\beta,\ x_0)$$

влечет $\mu P = \mu\,[\alpha,\ x_0) - \mu\,[\beta,\ x_0) = g\,(\beta) - g\,(\alpha)$.

Заметим в заключение, что соотношение (1) определяет функцию g по функции множества μ неоднозначно, однако эта неоднозначность не слишком велика: если g_1 — функция, определенная на Δ и подчиненная требованию, аналогичному условию (1): $g_1(\beta) - g_1(\alpha) = \mu P$, для любого промежутка $P = [\alpha,\ \beta) \in \mathfrak{P}_\Delta$, то существует такое число C, что $g_1(x) = g(x) + C$ $(x \in \Delta)$, где g — функция, заданная формулой (4).

В самом деле, если $x \in \Delta$ и $x \geqslant x_0$, то $g\,(x) = \mu\,[x_0,\ x) = g_1(x) - g_1(x_0)$. Если же $x \in \Delta$, $x < x_0$, то $g(x) = -\mu\,[x,\ x_0) = g_1(x) - g_1(x_0)$. Отсюда видно, что число $C = g_1(x_0)$ удовлетворяет поставленным требованиям.

Пример 4. Рассмотрим, наконец, последний пример аддитивной функции множества. В качестве области задания этой функции рассмотрим систему $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots)$ (см. гл. I, п. 1.1). Самое функцию μ определим формулой

$$\mu P = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ \ldots\ (b_\nu - a_\nu)\ (P = [a_1,\ b_1) \times \\ \times [a_2,\ b_2) \times \ldots \times [a_\nu,\ b_\nu);\ a_k \leqslant b_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu). \tag{5}$$

При $\nu = 1$ число μP, как известно, называется *длиной промежутка* P, при $\nu = 2$ μP — это *площадь прямоугольника* P, в случае $\nu \geqslant 3$ величина μP называется *объемом прямоугольника* P.

Теорема 1 (2.I). *Функция множества* μ, *задаваемая на системе* $\mathfrak{P}^\nu$ *равенством* (5), *аддитивна.*

Доказательство. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — такое конечное семейство попарно не пересекающихся прямоугольников размерности ν, что объединение $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ также является прямоугольником, т. е. входит в систему $\mathfrak{P}^\nu$. Как и выше, доказывая равенство

$$\mu P = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k, \tag{6}$$

можно считать что $P_k \neq \Lambda$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Введем обозначения:

$$P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu),$$

$$P_k = \left[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right) \times \left[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}\right) \times \ldots \times \left[a_\nu^{(k)}, b_\nu^{(k)}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta_i = [a_i, b_i), \; \Delta_i^k = \left[a_i^{(k)}, b_i^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu; \; k = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $P_k \subset P (k = 1, 2, \ldots, n)$, то $\Delta_i^k \subset \Delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu; k = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, ввиду непустоты прямоугольников P_k будет

$$a_i \leqslant a_i^{(k)} < b_i^{(k)} \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu; \; k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Равенство (6) будем доказывать по индукции. В случае $n = 1$ оно справедливо тривиальным образом. Пусть m — натуральное число, большее единицы. Предположим, что равенство (6) доказано, если $n < m$. Докажем его истинность и при $n = m$.

Рассмотрим точку $a = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ пространства R^ν. Поскольку $a \in P$, то среди прямоугольников $P_1, P_2, \ldots, P_m$ имеется один, включающий точку a. Не уменьшая общности, можно считать, что $a \in P_1$. Это дает $a_i^{(1)} \leqslant a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, что вместе с (7) приводит к равенствам $a_i^{(1)} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Так как $m > 1$, то $P_1 \neq P$. Учитывая это, заключаем, что среди промежутков $\Delta_1^1, \Delta_2^1, \ldots, \Delta_\nu^1$ найдется отличный от соответствующего промежутка $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$. Можно считать, что $\Delta_1^1 \neq \Delta_1$.

Обозначим $\Delta_1^0 = \Delta_1 \setminus \Delta_1^1 = [a_1, b_1) \setminus \left[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}\right) = \left[b_1^{(1)}, b_1\right)$. Так как $\Delta_1^1 \neq \Delta_1$, промежуток $\Delta_1^0 \neq \Lambda$. Выберем произвольным образом число $x \in \Delta_1^0$. Точка $(x, a_2, \ldots, a_\nu) \in P$, следовательно, существует прямоугольник $P_{k_0} (k_0 = 1, 2, \ldots, m)$, которому принадлежит указанная точка. Нетрудно понять, что $k_0 \neq 1$ (в противном случае было бы $x \in \Delta_1^1$), поэтому можно считать $k_0 = m$. Отметим, что включение $(x, a_2, \ldots, a_\nu) \in P_m$ влечет за собой равенства $a_i^{(m)} = a_i$ $(i = 2, 3, \ldots, \nu)$. Промежутки Δ_1^1 и Δ_1^m не имеют общих элементов. Действительно, если бы существовало число $z \in \Delta_1^1 \cap \Delta_1^m$, то точка $(z, a_2, \ldots, a_\nu)$, как легко понять, принадлежала бы как прямоугольнику P_1, так и прямоугольнику P_m, между тем эти прямоугольники не пересекаются. Таким образом, $\Delta_1^m \subset \Delta_1^0$.

Образуем прямоугольники

$$Q_1 = \Delta_1^1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_\nu, \quad Q_2 = \Delta_1^0 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_\nu.$$

Из сказанного выше вытекает, что $P_1 \subset Q_1$, $P_m \subset Q_2$. Ясно, кроме того, что $Q_1 \cap Q_2 = \Lambda$.

Введем множества (см. рис. 2, *а*, *б*):

$$P_k' = Q_1 \cap P_k, \quad P_k'' = Q_2 \cap P_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Как отмечалось в гл. I, п. 1.1 (предложение 1), эти множества суть прямоугольники. При этом $\bigcup_{k=1}^{m} P_k' = \bigcup_{k=1}^{m} (Q_1 \cap P_k) = Q_1 \cap \bigcup_{k=1}^{m} P_k = Q_1 \cap P = Q_1$ и, аналогично, $\bigcup_{k=1}^{m} P_k'' = Q_2$. Но включения $P_1 \subset Q_1$ и $P_m \subset Q_2$ влекут за собой равенства

$$P_1'' = P_1 \cap Q_2 \subset Q_1 \cap Q_2 = \Lambda, \quad P_m' = P_m \cap Q_1 \subset Q_2 \cap Q_1 = \Lambda, \tag{8}$$

так что окончательно можем записать

$$Q_1 = \bigcup_{k=1}^{m-1} P_k', \quad Q_2 = \bigcup_{k=2}^{m} P_k''. \tag{9}$$

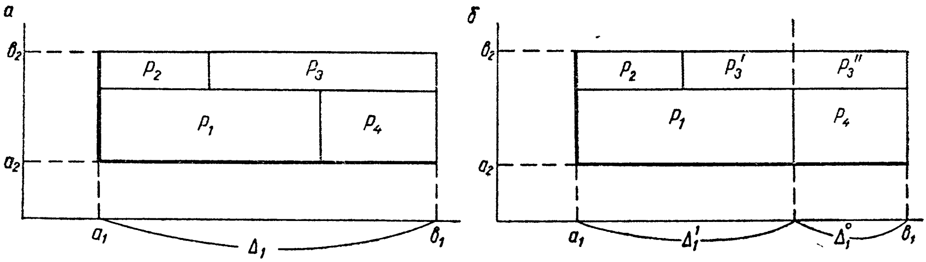

Рис. 2.

Предположим сначала, что $m = 2$. В этом случае равенства (9) приобретают вид $Q_1 = P_1' = P_1$, $Q_2 = P_2'' = P_2$, и так как

$$\mu P_1 = \mu Q_1 = \left(b_1^{(1)} - a_1^{(1)}\right)(b_2 - a_2) \ldots (b_\nu - a_\nu) =$$
$$= \left(b_1^{(1)} - a_1\right)(b_2 - a_2) \ldots (b_\nu - a_\nu),$$
$$\mu P_2 = \mu Q_2 = \left(b_1 - b_1^{(1)}\right)(b_2 - a_2) \ldots (b_\nu - a_\nu),$$

то $\mu P_1 + \mu P_2 = \mu P$, т. е. (7) в этом случае выполняется.

Пусть $m > 2$. Заметим, что прямоугольники P_k' $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ и, равным образом, прямоугольники P_k'' $(k = 2, 3, \ldots, m)$ попарно не пересекаются. Поэтому в силу индуктивного предположения с помощью (9) будем иметь $\mu Q_1 = \sum_{k=1}^{m-1} \mu P_k'$, $\mu Q_2 = \sum_{k=2}^{m} \mu P_k''$, что вследствие (8) можно переписать и так:

$$\mu Q_1 = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k', \quad \mu Q_2 = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k''. \tag{10}$$

Так же по индуктивному предположению (ведь $2 < m$) соотношения

$$P = Q_1 \cup Q_2, \quad P_k = P_k \cap P = P_k \cap (Q_1 \cup Q_2) = P_k' \cup P_k'' \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

влекут равенства

$$\mu P = \mu Q_1 + \mu Q_2, \quad \mu P_k = \mu P_k' + \mu P_k'' \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

а это вместе с (10) дает

$$\mu P = \mu Q_1 + \mu Q_2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\mu P_k' + \mu P_k''\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k,$$

что и требовалось доказать.

2.2. Существенное влияние на свойства аддитивной функции множества оказывают свойства ее области задания. В общем случае к тем, более или менее тривиальным, свойствам, о которых упоминалось в п. 2.1, добавить можно лишь очень немногое. Надо, впрочем, сказать, что, если ничего, кроме аддитивности, от рассматриваемой функции не требовать, то никакие качества области определения не обеспечивают возможности сколько-нибудь содержательных высказываний, справедливых по отношению ко всем таким функциям.

Учитывая эти обстоятельства, мы будем рассматривать в этом пункте вещественные и, более того, неотрицательные (т. е. принимающие только неотрицательные значения) аддитивные функции, заданные на том или ином кольце (гл. 1, п. 1.3).

Возвращаясь к определению 1 (2.1), заметим, что в случае *неотрицательной* функции μ сумма $\sum_{k=1}^{n} \mu E_k$, о которой идет речь в этом определении, всегда имеет смысл.

Теорема 2 (2.1). *Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо и μ — аддитивная неотрицательная функция, заданная на нем. Имеют место следующие утверждения:*

1) *функция μ обладает свойством монотонности: каковы бы ни были множества A, $B \in \mathfrak{R}$, если $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;*

2) *если множества A, $B \in \mathfrak{R}$ таковы, что хоть одно из чисел μA или μB конечно, то*

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B - \mu(A \cap B); \tag{11}$$

3) *функция μ обладает свойством полуаддитивности: каковы бы ни были множества $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$, если $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, то*

$$\mu A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu A_k. \tag{12}$$

Доказательство. 1) Если $\mu B = +\infty$, то неравенство $\mu A \leqslant \mu B$ очевидно. Пусть $\mu B < +\infty$. Так как система $\mathfrak{R}$ — кольцо, то $B \setminus A \in \mathfrak{R}$. Поэтому можно воспользоваться свойством субтрактивности: $\mu B - \mu A = \mu(B \setminus A)$. Поскольку μ — неотрицательная функция, $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$.

2) Заметим прежде всего, что объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ входят в кольцо $\mathfrak{R}$, так что все члены формулы (11) имеют смысл. Доказывая само равенство (11), предположим для определенности, что $\mu B < +\infty$. Поскольку $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$, причем множества A и $B \setminus (A \cap B)$ не пересекаются и оба принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$, в силу аддитивности функции μ будем иметь $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu(B \setminus (A \cap B))$. Предположение $\mu B < +\infty$ позволяет воспользоваться свойством субтрактивности, т. е. можно написать $\mu(B \setminus (A \cap B)) =$

$=\mu B-\mu(A\cap B)$, что после подстановки в предыдущее равенство приводит к (11).

3) Пусть сначала $n=2$. Объединение $A_1\cup A_2$ принадлежит кольцу $\mathfrak{R}$, и ввиду монотонности функции μ будет $\mu A\leqslant\leqslant\mu(A_1\cup A_2)$. Заменяя на основании утверждения 2 теоремы правую часть этого неравенства выражением $\mu A_1+\mu A_2-\mu(A_1\cap A_2)$* и учитывая, что $\mu(A_1\cap A_2)\geqslant 0$, получим требуемый результат.

Случай $n>2$ исчерпывается по индукции. Пусть m — некоторое натуральное число больше двух; предполагая утверждение доказанным для $2\leqslant n<m$, проверим справедливость неравенства (12) в случае $n=m$. Введем множество $B=\bigcup\limits_{k=2}^{m}A_k$. Очевидно, $B\in\mathfrak{R}$. Принимая во внимание, что $A\subset A_1\cup B$, можем написать в силу индуктивного предположения $\mu A\leqslant\mu A_1+\mu B$. По той же причине $\mu B\leqslant\sum\limits_{k=2}^{m}\mu A_k$, что вместе с предыдущим неравенством приводит к (12) при $n=m$.

Замечание. Требование, предъявляемое в теореме к области задания функции μ, существенно. Можно указать такую систему $\mathfrak{E}$ множеств и аддитивную положительную функцию μ, заданную на $\mathfrak{E}$, для которой ни одно из утверждений теоремы неверно. Такая функция μ существует даже в случае, когда система $\mathfrak{E}$ подчинена тому условию, что вместе с любыми множествами A и B она включает в себя их объединение $A\cup B$ и пересечение $A\cap B$.

Пример указанного вида построить сравнительно нетрудно, и мы предоставляем читателю сделать это в качестве упражнения. При этом полезно иметь в виду, что любая функция μ, заданная на системе $\mathfrak{E}$, аддитивна, если $\mathfrak{E}$ не содержит непересекающихся непустых множеств, а $\mu(\Lambda)=0$ (если $\Lambda\in\mathfrak{E}$).

2.3. Как уже отмечалось в гл. I, п. 1.6, успешное применение средств исследования, употребительных в анализе, сопряжено с такими свойствами изучаемых объектов, которые так или иначе связаны с бесконечными множествами. По этой причине рассмотрение в рамках анализа аддитивных функций, в определении которых фигурируют лишь конечные понятия, мало плодотворно.

Это обстоятельство заставляет углубить понятие аддитивной функции, введя в него элемент бесконечного.**

---

* Если $\mu A_1=\mu A_2=+\infty$, неравенство (12) не требует доказательства.

** При этом мы получаем выигрыш в виде возможности использовать более мощный аппарат. Не следует, однако, забывать и об известном проигрыше, вызванном переходом на более высокую ступень абстракции: при описании конкретных явлений с помощью математических понятий обычно нетрудно бывает оправдать наличие у этих явлений необходимых „конечных“ свойств, тогда как „бесконечные“ свойства не поддаются, очевидно, непосредственной экспериментальной проверке.

Дадим точное определение.

Определение 1. Рассмотрим функцию множества μ, заданную на системе $\mathfrak{E}$ подмножеств множества R^ν ($\nu=1, 2, \ldots$). Пусть $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся множеств системы $\mathfrak{E}$, такое, что $E = \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi \in \mathfrak{E}$. Если для любого такого семейства имеет смысл сумма $\sum_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi$ (д. 2, п. 1) и справедливо равенство

$$\mu E = \sum_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi, \tag{13}$$

то функция μ называется *счетно-аддитивной* (или *σ-аддитивной*).

Сделаем некоторые замечания в связи с данным определением.

Понятно, что счетно-аддитивная функция множества будет и аддитивной. Для обратного утверждения нет, разумеется, никаких оснований. Как будет вытекать из результата п. 2.5, понятие счетно-аддитивной функции оказывается уже понятия аддитивной функции. Кстати сказать, для более четкого разграничения этих понятий термин „аддитивная функция“ часто заменяют термином „конечно-аддитивная функция“.

Предложение 1. Пусть функция μ, заданная на системе множеств $\mathfrak{E}$, аддитивна и равенство (13) справедливо в том случае, когда множество Ξ есть множество всех натуральных чисел. Тогда функция μ счетно-аддитивна, т. е. равенство (13) справедливо в случае, когда Ξ — произвольное не более чем счетное множество.

Доказательство. В самом деле, раз μ аддитивна, равенство (13) имеет место всякий раз, когда Ξ — конечное множество. Пусть множество Ξ бесконечно и, следовательно, счетно. Это означает, что существует взаимно однозначное отображение φ множества N всех натуральных чисел на множество Ξ (д. 1, п. 3). По свойству коммутативности операции объединения (д. 1) $E = \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_{\varphi(n)}$. Заметим, что множества последовательности $\{E_{\varphi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ попарно не пересекаются, так как если $n, n' \in \mathbf{N}$ и $n \neq n'$, то ввиду взаимной однозначности отображения φ будет и $\varphi(n) \neq \varphi(n')$ (см. д. 1, п. 3), и, значит, по условию, $E_{\varphi(n)} \cap E_{\varphi(n')} = \Lambda$.

Далее, суммы $\sum_{n \in \mathbf{N}} \mu E_{\varphi(n)}$ и $\sum_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi$ имеют или не имеют смысл одновременно и в первом случае они совпадают (д. 2, п. 3). Поэтому

$$\mu E = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu E_{\varphi(n)} = \sum_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi.$$

Счетно-аддитивными функциями множества являются функции, рассмотренные в первых двух примерах п. 2.1. Доказательство их счетной аддитивности ничем по существу не отличается от проверки конечной аддитивности, и мы его не приводим. Функция примера 4 (п. 2.1) тоже счетно-аддитивна. Это будет доказано ниже в п. 2.7. Что касается функции множества, которой посвящен пример 3 (п. 2.1), то будет ли она счетно-аддитивной или нет — зависит от свойств функции g. Частично этот вопрос обсуждается в п. 2.6 (теорема 5 (2.I)).

Счетно-аддитивная функция множества, заданная на кольце, обладает свойством, которое называется *непрерывностью* и заключается в следующем утверждении.

Теорема 3 (2.I). *Пусть* μ — *счетно-аддитивная функция, область определения которой — кольцо* $\mathfrak{R}$ *подмножеств множества* R^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$). *Справедливы высказывания*:

1) *Если* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *возрастающая последовательность множеств из кольца* $\mathfrak{R}$, *таких, что число* μA_n *при любом* $n = 1, 2, \ldots$, *конечно, то в случае, когда объединение* $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *принадлежит кольцу* $\mathfrak{R}$, *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$ *и имеет место равенство*

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n. \tag{14}$$

2) *Если* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *убывающая последовательность множеств из кольца* $\mathfrak{R}$, *таких, что при каждом* n ($n = 1, 2, \ldots$) *число* μB_n *конечно, то в случае, когда пересечение* $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ *принадлежит кольцу* $\mathfrak{R}$, *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu B_n$ *и имеет место равенство*

$$\mu B = \lim_{n\to\infty} \mu B_n. \tag{15}$$

Доказательство. 1) Положим $A_0 = \Lambda$ и введем множества

$$E_k = A_k \setminus A_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Все эти множества входят в кольцо $\mathfrak{R}$. Кроме того, они попарно не пересекаются. Действительно, если бы существовал элемент $x \in E_k \cap E_{k'}$ ($k, k' = 1, 2, \ldots;\ k \neq k'$), то ввиду (16) мы имели бы $x \in A_k \cap A_{k'}$ и одновременно $x \overline{\in} A_{k-1} \cup A_{k'-1}$. Предполагая, что $k < k'$ и учитывая, что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, можем написать $A_k \cap A_{k'} = A_k$; $A_{k-1} \cup A_{k'-1} = A_{k'-1}$. Таким образом, должно было бы быть $x \in A_k$ и $x \overline{\in} A_{k'-1}$. Но $k' - 1 \geqslant k$ и, следовательно, $A_{k'-1} \supset A_k$, вследствие чего указанные включения невозможны.

Так же легко проверяется, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. В самом деле, из (16) вытекает, что $E_k \subset A_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Стало быть, и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$. Обратно, пусть x — элемент множества A; существует номер k_0 такой, что $x \in A_{k_0}$. При этом можно считать, что k_0 — наименьший номер, обладающий этим свойством, так что, в частности, $x \overline{\in} A_{k_0-1}$. Но тогда

$$x \in A_{k_0} \setminus A_{k_0-1} = E_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Все сказанное позволяет применить к последовательности $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ определение счетной аддитивности. Это приводит к заключению о существовании суммы $\sum\limits_{k \in \mathbf{N}} \mu E_k$ (здесь $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел) и справедливости равенства $\mu A = \sum\limits_{k \in \mathbf{N}} \mu E_k$. Но если существует сумма $\sum\limits_{k \in \mathbf{N}} \mu E_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu E_k$ имеет сумму, равную $\sum\limits_{k \in \mathbf{N}} \mu E_k = \mu A$. Значит, существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu E_k = \mu A$. Остается заметить, что ввиду свойства субтрактивности (п. 2.1) и конечности μA_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu E_k = \sum_{k=1}^{n} (\mu A_k - \mu A_{k-1}) = \mu A_n - \mu A_0 = \mu A_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2) Введем множества $A_n = B_1 \setminus B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Понятно, что каждое A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежит кольцу $\mathfrak{R}$ и что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая. Основываясь на предложении 2 (д. 1, п. 6), можем, кроме того, написать $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = B_1 \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \setminus B$. Обозначим это множество через A. Поскольку, очевидно, $A \in \mathfrak{R}$ и μA_k конечно при любом k $(k = 1, 2, \ldots)$, к последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ применимо утверждение 1). Следовательно, существует $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$, равный μA. Но так как μB_n конечно $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\mu A = \mu B_1 - \mu B, \quad \mu A_n = \mu B_1 - \mu B_n.$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{n \to \infty} \mu B_n$, равный μB.

Замечание 1. Пусть μ — аддитивная неотрицательная функция, определенная на кольце $\mathfrak{R}$. Предположим, что она непрерывна снизу, т. е. что какова бы ни была последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств, удовлетворяющих условиям п. 1) теоремы, существует $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n = \mu A$. Тогда μ счетно-аддитивна.

Доказательство. Как явствует из замечания, сделанного в связи с определением счетной аддитивности, достаточно доказать, что для любой последовательности $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся множеств из кольца $\mathfrak{R}$, таких, что $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{R}$, справедливо равенство $\mu E=\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$.*

Чтобы доказать это равенство, предположим сначала, что имеется хотя бы одно множество E_n ($n=1, 2, \ldots$), для которого $\mu E_n=+\infty$. Поскольку $E \supset E_n$, то вследствие монотонности функции μ будет и $\mu E=+\infty$. Понятно, что и сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k=+\infty$.

Рассмотрим случай, когда $\mu E_k<+\infty$ ($k=1, 2, \ldots$). Обозначим $A_n=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ ($n=1, 2, \ldots$). Каждое из этих множеств входит в кольцо $\mathfrak{R}$ (см. гл. I, п. 1.3), и они образуют возрастающую последовательность. Так как, очевидно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=E$ и ввиду аддитивности функции μ будет $\mu A_n=\sum_{k=1}^{n} \mu E_k$, то, по условию, $\mu E=\lim_{n\to\infty} \mu A_n=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu E_k=\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$, что и требовалось доказать.

Если к сделанным предположениям о свойствах μ добавить еще условие, что μ — конечная функция, то можно доказать следующий факт.

Замечание 2. Пусть μ непрерывна сверху, т. е. пусть для любой последовательности $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей требованиям пункта 2) теоремы, существует $\lim_{n\to\infty} \mu B_n$, равный $\mu B\left(B=\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$. Тогда функция μ счетно-аддитивна.

Доказательство этого предложения мы предоставляем читателю. Предлагаем также и более трудную задачу: доказать оба сформулированные выше предложения, не предполагая функцию μ неотрицательной.

Замечание 3. Если в условиях теоремы μ не только счетно-аддитивная, но и неотрицательная функция, то в п. 1) предположение о конечности чисел μA_n можно опустить.

Доказательство. Если для какого-нибудь номера n_0 окажется $\mu A_{n_0}=+\infty$, то вследствие монотонности функции μ

* Ввиду неотрицательности функции μ вопрос о существовании суммы $\sum_{k\in\mathrm{N}} \mu E_k$ здесь не возникает. По этой же причине вместо указанной суммы можно говорить о сумме ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$.

(теорема 2 (2.I), п. 1)) $\mu A_n = +\infty$ ($n = n_0$, $n_0+1, \ldots$) и точно так же $\mu A = +\infty$. Следовательно, и в этом случае существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \mu A$.

Следует иметь в виду, что по отношению к п. 2) аналогичного замечания сделать нельзя.

Рассмотрим в связи с этим функцию μ — дискретное распределение массы с нагрузками $p_n = 1$ ($n = 1, 2, \ldots$) в точках n ($n = 1, 2, \ldots$) пространства R^1 (см. п. 2.1). Область определения функции μ — система всех подмножеств множества R^1 — является, очевидно, кольцом. Понятно также, что μ — неотрицательная функция. Между тем если под B_n понимать промежуток $[n, +\infty)$, то, поскольку пересечение $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \Lambda$, $\mu B = 0$, хотя $\mu B_n = +\infty$ при любом n ($n = 1, 2, \ldots$).

При тех же условиях, что и в замечании 3, можно высказать несколько более сильное утверждение.

Следствие 1. *Пусть μ — счетно-аддитивная неотрицательная функция, заданная на кольце $\mathfrak{R}$. Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств из кольца $\mathfrak{R}$ возрастающая и множество $A \in \mathfrak{R}$ таково, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$ и выполняется неравенство*

$$\mu A \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu A_n. \tag{17}$$

Доказательство. Существование предела вытекает из монотонности функции μ: числовая последовательность $\{\mu A_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая. Далее, поскольку $A = A \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$ и множества $A \cap A_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$, можем написать в соответствии с результатом замечания 3 $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A \cap A_n)$. Но $A \cap A_n \subset A_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), так что, опять используя монотонность функции μ, будем иметь $\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu A_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), что после предельного перехода и дает (17).

Более важное свойство счетно-аддитивной неотрицательной функции множества — *счетная полуаддитивность* (или также *σ-полуаддитивность*) — содержится в следующем утверждении.

Следствие 2. *Пусть функция множества μ удовлетворяет условиям следствия 1. Каково бы ни было не более чем счетное семейство $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) множеств из кольца $\mathfrak{R}$ и множество E, также принадлежащее кольцу $\mathfrak{R}$ и такое, что $E \subset \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} E_\xi$, справедливо неравенство*

$$\mu E \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} \mu E_\xi. \tag{18}$$

Доказательство. Так как μ, будучи счетно-аддитивной, аддитивна, то в случае, когда Ξ — конечное множество, неравенство (18) уже установлено в теореме 2 (2.I), п. 3. Когда же Ξ — множество бесконечное и, стало быть, счетное, можно считать, что оно совпадает с множеством $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел. Обоснование этого допущения может быть осуществлено с помощью тех же рассуждений, которые были использованы в начале пункта в связи с одним из замечаний по поводу определения счетной аддитивности. Заметим, что при сделанном предположении ($\Xi = \mathbf{N}$) вместо суммы $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi$ можно говорить о сумме ряда $\sum\limits_{\xi=1}^{\infty} \mu E_\xi$ — и та и другая существуют и равны между собой ввиду неотрицательности функции μ.

Образуем множества $A_n = \bigcup\limits_{\xi=1}^{n} E_\xi$ ($n = 1, 2, \ldots$). Множества A_n ($n = 1, 2, \ldots$) принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{\xi=1}^{\infty} E_\xi \supset E$. Таким образом, мы оказываемся в условиях следствия 1, так что вправе написать неравенство $\mu E \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$. Но, основываясь на результате п. 3) теоремы 2 (2.I), будем иметь $\mu A_n \leqslant \sum\limits_{\xi=1}^{n} \mu E_\xi$ ($n = 1, 2, \ldots$). Переходя здесь к пределу и учитывая сделанные выше замечания, получаем (18).

Замечание 4. Если μ — аддитивная неотрицательная функция, заданная на кольце $\mathfrak{R}$, то счетная аддитивность функции μ равносильна ее счетной полуаддитивности.

Доказательство. Достаточно установить следующее неравенство:

$$\sum_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi \leqslant \mu E,$$

каково бы ни было множество $E \in \mathfrak{R}$ и не более чем счетное семейство $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) попарно не пересекающихся множеств из кольца $\mathfrak{R}$, таких, что $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi \subset E$.

Докажем это неравенство. Пусть Θ — произвольное конечное подмножество множества Ξ. Тогда $\bigcup\limits_{\xi \in \Theta} E_\xi \in \mathfrak{R}$ и $\bigcup\limits_{\xi \in \Theta} E_\xi \subset E$. В силу монотонности и аддитивности функции μ имеем:

$$\mu E \geqslant \mu\Big(\bigcup_{\xi \in \Theta} E_\xi\Big) = \sum_{\xi \in \Theta} \mu E_\xi.$$

Следовательно,

$$\mu E \geqslant \sup_{\Theta \subset \Xi} \sum_{\xi \in \Theta} \mu E_\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \mu E_\xi.$$

2.4. Результаты пунктов 2.2 и 2.3 относятся к аддитивным и, в частности, счетно-аддитивным функциям, заданным на том или ином кольце. Между тем в конкретных случаях, которые как раз и представляют наибольший интерес, область определения рассматриваемой аддитивной функции кольцом не является. Именно такова ситуация в примерах 3 и 4 из п. 2.1. В связи со сказанным было бы желательно иметь возможность устраивать такое распространение (д. 1, п. 3) данной аддитивной или счетно-аддитивной функции, которое не утратило бы свойства аддитивности или, соответственно, счетной аддитивности и вместе с тем было бы определено на кольце. Разумеется, в общем случае безнадежно искать решение указанной задачи — его не существует. Это становится понятным, если вспомнить замечание к теореме 2 (2.1). Однако поставленная задача разрешима, если предъявить к данной функции некоторые дополнительные требования.

Рассмотрим систему $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν (гл. I, п. 1.1). Обозначим через $\mathfrak{R}^\nu$ кольцо, порожденное системой $\mathfrak{P}^\nu$ (теорема 1 (1.I)).

Лемма 1. *Пусть μ — аддитивная неотрицательная функция, определенная на системе $\mathfrak{P}^\nu$. Существует единственная аддитивная функция μ', заданная на кольце $\mathfrak{R}^\nu$ и являющаяся распространением функции μ. При этом μ' также является неотрицательной функцией.*

Доказательство. Напомним сначала, что согласно теореме 1 (1.I) множество A входит в кольцо $\mathfrak{R}^\nu$ в том и только в том случае, когда существует конечное семейство $P_1, P_2, \ldots, P_n$ попарно не пересекающихся полуоткрытых прямоугольников, объединение которого равно A:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k. \tag{19}$$

Как и при доказательстве теоремы 1 (1.I), будем называть представление множества $A \in \mathfrak{R}^\nu$ в форме (19) регулярным.

Предположим, что функция μ', обладающая требуемыми свойствами, существует. Так как $\mu' \supset \mu$ (это означает, что μ' служит распространением функции μ (см. д. 1, п. 3)), то для любого $P \in \mathfrak{P}^\nu$ будет $\mu' P = \mu P$. Поэтому если A — произвольное множество, принадлежащее кольцу $\mathfrak{R}^\nu$, и (19) — его регулярное представление, то вследствие аддитивности функции μ' можем написать

$$\mu' A = \sum_{k=1}^{n} \mu' P_k = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k. \tag{20}$$

Это равенство сразу же позволяет сделать заключение о неотрицательности функции μ'.

Далее, из (20) вытекает также единственность функции μ'. В самом деле, если μ'' — аддитивная функция, определенная на кольце $\mathfrak{R}^\nu$ и такая, что $\mu'' \supset \mu$, то можем написать равенство, подобное (20): $\mu'' A = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k$ для любого множества $A \in \mathfrak{R}^\nu$, имеющего регулярное представление (19). Сопоставляя это с (20), получаем $\mu' A = \mu'' A$ $(A \in \mathfrak{R}^\nu)$, т. е., поскольку области задания обеих функций μ' и μ'' совпадают, $\mu' = \mu''$.

Заметим, что соотношение (20) без каких-либо дополнительных рассуждений не может служить достаточным основанием для вывода о существовании функции μ'. Дело здесь прежде всего в том, что (20) вообще может не определять на $\mathfrak{R}^\nu$ никакой функции, так как сумма $\sum_{k=1}^{n} \mu P_k$ зависит, по крайней мере на первый взгляд, не только от множества A, но и от регулярного его представления (а таких представлений у одного и того же множества имеется много). Поэтому, чтобы можно было говорить о функции μ', определенной на кольце $\mathfrak{R}^\nu$ соотношением (20), требуется доказать, что на самом деле сумма (20) определяется только множеством A и не зависит от выбора того или иного представления этого множества.

Рассмотрим наряду с (19) еще одно регулярное представление множества $A: A = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$. Очевидно,

$$P_k = P_k \cap A = P_k \cap \bigcup_{j=1}^{m} Q_j = \bigcup_{j=1}^{m} (P_k \cap Q_j) \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Поскольку пересечения $P_k \cap Q_j$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) представляют собой прямоугольники (гл. I, п. 1.1, предл. 1), которые, понятно, не имеют один с другим общих элементов, то в силу аддитивности функции μ получаем из (21)

$$\mu P_k = \sum_{j=1}^{m} \mu (P_k \cap Q_j) \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Так как функция μ неотрицательна, то сумма $\sum_{k=1}^{n} \mu P_k$ имеет смысл, и в силу (22)

$$\sum_{k=1}^{n} \mu P_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \mu (P_k \cap Q_j) \right];$$

по тем же самым причинам справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \mu Q_j = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} \mu (Q_j \cap P_k) \right].$$

Если заметить, что ввиду неотрицательности функции μ возможна перестановка порядка суммирования в выражении $\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \mu (P_k \cap Q_j) \right]$, то равенство $\sum_{k=1}^{n} \mu P_k = \sum_{j=1}^{m} \mu Q_j$ будет доказано.

Таким образом, полагая для произвольного $A \in \mathfrak{R}^\nu$

$$\mu' A = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k, \tag{23}$$

где полуоткрытые прямоугольники $P_1, P_2, \ldots, P_n$ образуют регулярное представление множества A, мы зададим на $\mathfrak{R}^\nu$ функцию μ'.

Убедимся, что μ' обладает требуемыми свойствами. Прежде всего докажем, что $\mu' \supset \mu$.

Если множество $A \in \mathfrak{P}^\nu$, т. е. если A является полуоткрытым прямоугольником, то мы получим регулярное представление этого множества, если примем в (19) $n = 1$, $P_1 = A$. Согласно определению (23), получим тогда $\mu' A = \mu A$, а это и означает, что μ' служит распространением функции μ, т. е. что $\mu' \supset \mu$.

Проверим аддитивность функции μ'. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — конечное семейство попарно не пересекающихся множеств из кольца $\mathfrak{R}^\nu$. Обозначим $A = \bigcup_{s=1}^{r} A_s$.

Предположим сначала, что $r=2$. Пусть $A_1 = \bigcup_{k=1}^{n_1} P_k^1$ и $A_2 = \bigcup_{k=1}^{n_2} P_k^2$ — регулярные представления множеств A_1 и A_2. Обозначим

$$Q_k = \begin{cases} P_k^1 & (k=1, 2, \ldots, n_1), \\ P_{k-n_1}^2 & (k = n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2). \end{cases} \tag{24}$$

Прямоугольники Q_k $(k=1, 2, \ldots, n_1+n_2)$ попарно не пересекаются. Действительно, если $k, k' = 1, 2, \ldots, n_1+n_2$ $(k \neq k')$ и $1 \leqslant k, k' \leqslant n_1$ или $n_1+1 \leqslant k, k' \leqslant n_1+n_2$, то соотношение $Q_k \cap Q_{k'} = \Lambda$ вытекает из того, что оба прямоугольника Q_k и $Q_{k'}$ входят в регулярное представление одного и того же множества A_1 или A_2. Если же $1 \leqslant k \leqslant n_1$, а $n_1+1 \leqslant k' \leqslant n_1+n_2$, то $Q_k \subset A_1$, а $Q_{k'} \subset A_2$, и равенство $Q_k \cap Q_{k'} = \Lambda$ обеспечивается тем, что множества A_1 и A_2 не имеют общих элементов. Так как

$$\bigcup_{k=1}^{n_1+n_2} Q_k = \bigcup_{k=1}^{n_1} Q_k \cup \bigcup_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} Q_k = \bigcup_{k=1}^{n_1} P_k^1 \cup \bigcup_{k=1}^{n_2} P_k^2 = A_1 \cup A_2 = A,$$

то из сказанного следует, что прямоугольники (24) образуют регулярное представление множества A. В соответствии с определением функции μ' можем написать тогда

$$\mu' A = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \mu Q_k = \sum_{k=1}^{n_1} \mu Q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \mu Q_k = \sum_{k=1}^{n_1} \mu P_k^1 + \sum_{k=1}^{n_2} \mu P_k^2 = \mu' A_1 + \mu' A_2.$$

Случай $r > 2$ исчерпывается по индукции, которая возможна благодаря тому, что система $\mathfrak{R}^\nu$ представляет собой кольцо.

Лемма доказана.

Замечание 1. Неотрицательность функции μ была использована в доказательстве леммы только для того, чтобы гарантировать существование сумм вида (23) и обеспечить возможность изменения порядка суммирования при проверке независимости указанных сумм от выбора того или иного регулярного представления множества A. Этой же цели, очевидно, можно достичь, если вместо неотрицательности предположить конечность функции μ.

Замечание 2. Результат леммы и замечание 1 сохраняют силу и в более общем случае, когда место системы $\mathfrak{P}^\nu$ занимает система $\mathfrak{P}_D^\nu$ (см. замечание из гл. I п. 1.1).

Разумеется, кольцо $\mathfrak{R}^\nu$ должно быть заменено в этом случае кольцом $\mathfrak{R}_D^\nu$.

Замечание 3. Еще более общее предложение получится, если в формулировке леммы вместо системы $\mathfrak{P}^\nu$ рассмотреть произвольное полукольцо $\mathfrak{P}$ (гл. I, п. 1.2), роль кольца $\mathfrak{R}^\nu$ будет при этом играть кольцо $\mathfrak{R}$, порожденное полукольцом $\mathfrak{P}$ (см. замечание 2 к теореме 1 (1.I)).

Следствие. *Неотрицательная аддитивная функция* μ, *определенная на системе* $\mathfrak{P}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, *обладает свойствами, указанными в теореме* 2 (2.I), *т. е.*

1) μ — *монотонна*;

2) *если* P_1, P_2 — *произвольные прямоугольники, такие, что объединение* $P_1 \cup P_2$ — *также прямоугольник, то в случае, когда хотя бы одно из чисел* μP_1 *или* μP_2 *конечно, справедливо равенство*

$$\mu(P_1 \cup P_2) = \mu P_1 + \mu P_2 - \mu(P_1 \cap P_2);$$

3) μ — *полуаддитивна.*

Результаты следствия справедливы, очевидно, и по отношению к функции, заданной на системе $\mathfrak{P}_D^\nu$, или, более общо, на произвольном полукольце $\mathfrak{P}$.

Определение. Заданная на системе $\mathfrak{C}$ подмножеств множества R^ν ($\nu=1, 2, \dots$) счетно-аддитивная неотрицательная функция μ называется *мерой*, если она обладает свойством *σ-конечности*,* которое заключается в следующем.

Каково бы ни было множество $E \in \mathfrak{C}$, существует счетное семейство $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) множеств из системы $\mathfrak{C}$, такое, что

$$E \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi; \ \mu E_\xi < +\infty \quad (\xi \in \Xi). \tag{25}$$

Ясно, что конечность функции μ обеспечивает ее σ-конечность; чтобы удовлетворить соотношениям (25), достаточно принять за Ξ произвольное счетное множество и положить $E_\xi = E$ ($\xi \in \Xi$).

Заметим еще, что в (25) в качестве семейства $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) всегда можно рассматривать последовательность множеств, т. е. считать, что Ξ — это множество всех натуральных чисел. Обоснование этого обстоятельства может быть осуществлено по той же схеме, что и в гл. I, п. 1.4 (см. замечание к определению 1 σ-множества), в связи с чем мы его не приводим.

Наконец, если система $\mathfrak{C}$ — кольцо (или хотя бы полукольцо), то требование (25) можно заменить несколько более простым:

$$E = \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi, \ \mu E_\xi < +\infty \quad (\xi \in \Xi). \tag{26}$$

Действительно, если удалось указать семейство $\{E_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) множеств из системы $\mathfrak{C}$, удовлетворяющее условиям (25), то, заменив множества E_ξ пересечениями $E \cap E_\xi$ ($\xi \in \Xi$), которые также принадлежат $\mathfrak{C}$, мы получим семейство, для которого выполнено (26).

В качестве примера меры укажем пока только на дискретное распределение массы с неотрицательными конечными нагрузками (см. п. 2.1). Неотрицательность и счетная аддитивность этой функции уже отмечались, σ-конечность проверяется тоже достаточно просто: если множество Ξ конечно, то рассматриваемая функция μ также будет конечной, и, стало быть, σ-конечной; если же Ξ бесконечно, то, считая для простоты, что число $0 \overline{\in} \Xi$, примем $H = \{0\} \cup \Xi$ и

$$E_\eta = \begin{cases} \{\eta\} & (\eta \in \Xi), \\ R^\nu \setminus \Xi & (\eta = 0) \end{cases} \quad (\eta \in H);$$

так как $\mu E_\eta = p_\eta < +\infty$ ($\eta \in \Xi$), $\mu E_0 = 0$ и $\bigcup_{\eta \in H} E_\eta = R^\nu$, то семейство $\{E_\eta\}$ ($\eta \in H$) удовлетворяет условиям (25) при любом E.

---

* Понятие σ-конечности, определение которого дается ниже, относится не только к счетно-аддитивным, но и произвольным положительным функциям множества.

Существенным добавлением к лемме 1 является следующий результат.

Теорема 4 (2.I). *Пусть μ — мера, заданная на системе $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν. Существует единственная мера μ', заданная на кольце $\mathfrak{R}^\nu$, которая служит распространением функции μ.*

Доказательство. Будучи мерой, функция μ счетно-аддитивна и, следовательно, конечно-аддитивна. Кроме того, μ неотрицательна, так что мы находимся в условиях леммы. Это означает, что существует определенная на $\mathfrak{R}^\nu$ единственная аддитивная функция $\mu' \supset \mu$. Докажем, что μ' обладает и всеми остальными свойствами меры.

Неотрицательность функции μ' уже установлена в лемме. Убедимся в счетной аддитивности μ'. Пусть $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся множеств из кольца $\mathfrak{R}^\nu$, объединение которого $A = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} A_\xi$ также принадлежит этому кольцу. Каждое из множеств A_ξ $(\xi \in \Xi)$ и множество A можно представить в виде объединения конечного семейства попарно не пересекающихся прямоугольников:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k,\ A_\xi = \bigcup_{j=1}^{n_\xi} P_j^\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

При этом

$$\mu' A = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k, \tag{27}$$

и, аналогично,

$$\mu' A_\xi = \sum_{j=1}^{n_\xi} \mu P_j^\xi \quad (\xi \in \Xi). \tag{28}$$

Если принять $P_j^\xi = \Lambda$ для $\xi \in \Xi$ и $j = n_\xi + 1,\ n_\xi + 2, \ldots$, то вместо (28) можно будет написать

$$\mu' A_\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \mu P_j^\xi = \sum_{j\in \mathbf{N}} \mu P_j^\xi \quad (\xi \in \Xi), \tag{29}$$

где через $\mathbf{N}$, как обычно, обозначено множество всех натуральных чисел.

Введем еще множество $H = \Xi \times \mathbf{N}$ и обозначим через Q_k^η пересечение $P_k \cap P_j^\xi$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $\eta = (\xi, j) \in H$, которое так же, как P_k и P_j^ξ, является прямоугольником (гл. I, п. 1.1, предл. 1).

Так как

$$P_k = P_k \cap A = P_k \cap \left(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\right) = P_k \cap \left[\bigcup_{\xi\in\Xi}\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} P_j^\xi\right)\right] = \bigcup_{\xi\in\Xi}\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}}\left(P_k \cap P_j^\xi\right)\right) =$$
$$= \bigcup_{\eta\in H} Q_k^\eta \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и $Q_k^\eta \cap Q_k^{\eta'} = \Lambda$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \eta, \eta' \in H;\ \eta \neq \eta')$, то ввиду счетной аддитивности функции μ

$$\mu P_k = \sum_{\eta\in H} \mu Q_k^\eta \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

так что в силу (27)

$$\mu' A = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\eta\in H} \mu Q_k^\eta\right).$$

Из соотношения

$$P_j^\xi = P_j^\xi \cap A = P_j^\xi \cap \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigcup_{k=1}^{n} Q_k^\eta \quad (\eta = (\xi, j) \in H)$$

получаем с помощью (29)

$$\mu' A_\xi = \sum_{j\in N} \mu P_j^\xi = \sum_{j\in N}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu\left(P_k \cap P_j^\xi\right)\right) \quad (\xi \in \Xi)$$

и

$$\sum_{\xi\in\Xi} \mu' A_\xi = \sum_{\xi\in\Xi}\left(\sum_{j\in N}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu\left(P_k \cap P_j^\xi\right)\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\eta\in H} \mu Q_k^\eta\right) = \mu' A.$$

Изменение порядка суммирования, производившееся выше, допустимо ввиду неотрицательности функции μ.

Осталось убедиться в σ-конечности функции μ'. Рассмотрим произвольное множество $A \in \mathfrak{R}^\nu$. Его можно представить в виде объединения конечного семейства прямоугольников: $A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$. Так как функция μ, будучи мерой, σ-конечна, то для каждого k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ можно указать последовательность $\{P_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ прямоугольников, такую, что

$$P_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^k; \quad \mu P_j^k < +\infty \quad (j = 1, 2, \ldots), \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Поскольку

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k \subset \bigcup_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^k\right); \quad \mu' P_j^k = \mu P_j^k < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots),$$

семейство $\{P_j^k\}$ $(j = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяет всем требованиям определения σ-конечности.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Так же, как и лемма, теорема справедлива и по отношению к функциям, заданным на системе $\mathfrak{P}_D^\nu$, или, более общо, на произвольном полукольце.

Замечание 2. Благодаря тому, что меру μ, заданную на полукольце, можно распространить до меры, заданной на кольце, утверждение теоремы 3 (2.I) (в которой счетно-аддитивная функция предполагается определенной на кольце) остается справедливым и для меры μ, заданной на полукольце. Сохраняются также замечание 3 к теореме 3 (2.I) и следствия 1 и 2 к ней.

2.5. Основываясь на доказанных выше фактах, рассмотрим два важных примера.

Мы будем применять следующие обозначения: если $P = [\alpha_1, \beta_1) \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu)$, то $\overline{P} = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\mathring{P} = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \ldots \times (\alpha_\nu, \beta_\nu)$. Легко понять, что $\overline{P}$ — замкнутое множество, равное замыканию полуоткрытого прямоугольника P, а множество $\mathring{P}$ открыто и совпадает с множеством внутренних точек полуоткрытого прямоугольника P.

Пусть $\nu \in N$ и $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$ — семейство не пустых открытых слева промежутков расширенной числовой прямой. Обозначим через D произведение $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_\nu$ и рассмотрим систему $\mathfrak{P}_D^\nu$ (см. гл. I, п. 1.1) всех таких прямоугольников

$$P = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2) \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu), \tag{30}$$

что

$$\alpha_k \leqslant \beta_k, \quad \alpha_k, \beta_k \in \Delta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{31}$$

Лемма 2. *Пусть μ — аддитивная неотрицательная и конечная функция, заданная на системе $\mathfrak{P}_D^\nu$. Для того чтобы функция μ была счетно-аддитивной (т. е. для того чтобы функция μ была мерой), необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1) *для любого прямоугольника* $P \in \mathfrak{P}_D^\nu$

$$\mu P = \inf_{\substack{P' \in \mathfrak{P}_D^\nu \\ \mathring{P}' \supset P}} \mu P';$$

2) *для любого прямоугольника* $P \in \mathfrak{P}_D^\nu$

$$\mu P = \sup_{\substack{P'' \in \mathfrak{P}_D^\nu \\ \overline{P''} \subset P}} \mu P''.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что μ — мера. В силу монотонности функции μ (см. следствие к лемме 1, п. 2.4 и замечание 2 к той же лемме)

$$\mu P'' \leqslant \mu P \leqslant \mu P',$$

каковы бы ни были прямоугольники P, P', P'', принадлежащие системе $\mathfrak{P}_D^\nu$ и такие, что $\overline{P''} \subset P \subset \mathring{P}'$. Поэтому

$$\sup_{\substack{P'' \in \mathfrak{P}_D^\nu \\ \overline{P''} \subset P}} \mu P'' \leqslant \mu P \leqslant \inf_{\substack{P' \in \mathfrak{P}_D^\nu \\ \mathring{P}' \supset P}} \mu P'.$$

Проверим, что $\inf\limits_{\substack{P' \in \mathfrak{P}_D^\nu \\ \mathring{P}' \supset P}} \mu P' \leqslant \mu P.$

Пусть $P = [\alpha_1, \beta_1) \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu)$. Так как промежутки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$, произведением которых является множество D, открыты слева, то найдется такое число $\delta > 0$, что $[\alpha_1 - \delta, \beta_1) \times \ldots \times [\alpha_\nu - \delta, \beta_\nu) \subset D$. Рассмотрим убывающую последовательность прямоугольников $\{P_n\}_{n=1}^\infty$, где $P_n = \left[\alpha_1 - \frac{\delta}{n}, \beta_1\right) \times \ldots \times \left[\alpha_\nu - \frac{\delta}{n}, \beta_\nu\right)$. Ясно, что $\bigcap\limits_{n=1}^\infty P_n = P$ и что $\mathring{P}_n \supset P$, $P_n \in \mathfrak{P}_D^\nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ввиду того, что μ — конечная мера (см. замечание 2 к теореме 4 (2.1)), справедливо равенство $\lim\limits_{n \to \infty} \mu P_n = \mu P$. Кроме того, при любом n $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\mu P_n \geqslant \inf_{\substack{\mathring{P}' \supset P \\ P' \in \mathfrak{P}_D^\nu}} \mu P',$$

так что и

$$\mu P = \lim_{n \to \infty} \mu P_n \geqslant \inf_{\substack{\mathring{P}' \supset P \\ P' \in \mathfrak{P}_D^\nu}} \mu P'.$$

Тем самым установлено, что мера μ обладает свойством 1 (см. формулировку леммы).

При доказательстве того, что μ обладает также свойством 2, можно считать, что $P \neq \Lambda$. В таком случае, рассматривая возрастающую последовательность прямоугольников $\{\widetilde{P}_n\}_{n=1}^\infty$, где $\widetilde{P}_n = \left[\alpha_1, \beta_1^{(n)}\right) \times \ldots \times \left[\alpha_\nu, \beta_\nu^{(n)}\right)$, а $\beta_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \beta_j$, $\beta_j^{(n)} \leqslant \beta_j^{(n+1)}$ $(j=1, 2, \ldots, \nu;\ n=1, 2, \ldots)$, получим (так же, как и выше) $\widetilde{\overline{P}}_n \subset P (n=1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\widetilde{P}_n = \mu P$, откуда следует, что $\sup\limits_{\substack{\overline{P''} \subset P \\ P'' \in \mathfrak{P}_D^\nu}} \mu P'' = \mu P$.

Достаточность. Пусть $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся прямоугольников, принадлежащих системе $\mathfrak{P}_D^\nu$, причем множество $P = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} P_\xi$ также принадлежит этой системе. Докажем, что при выполнении условий 1) и 2) леммы 1

$$\mu P = \sum_{\xi\in\Xi} \mu P_\xi. \tag{32}$$

По замечанию 4 к теореме 3 (2.I)

$$\mu P \geqslant \sum_{\xi\in\Xi} \mu P_\xi.$$

Осталось доказать, что

$$\mu P \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} \mu P_\xi. \tag{33}$$

При этом, очевидно, можно считать, что $P \neq \Lambda$.

Возьмем положительное число ε и найдем семейство $\{\varepsilon_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ положительных чисел, такое, что $\sum\limits_{\xi\in\Xi} \varepsilon_\xi = \varepsilon$ (предл. 2, д. 2, п. 5). Воспользуемся свойством 1) функции μ. В силу этого свойства при любом $\xi \in \Xi$ существует прямоугольник $Q_\xi \in \mathfrak{P}_D^\nu$, такой, что

$$\mathring{Q}_\xi \supset P_\xi, \ \mu Q_\xi - \mu P_\xi < \varepsilon_\xi. \tag{34}$$

Теперь воспользуемся свойством 2) и найдем прямоугольник $Q \in \mathfrak{P}_D^\nu$, такой, что

$$\overline{Q} \subset P, \ \mu P - \mu Q < \varepsilon. \tag{35}$$

Множество $\overline{Q}$ замкнуто и ограничено в пространстве R^ν, а множества $\mathring{Q}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ открыты в этом пространстве. Кроме того, ввиду очевидных соотношений

$$Q \subset \overline{Q} \subset P, \quad Q_\xi \supset \mathring{Q}_\xi \supset P_\xi \quad (\xi \in \Xi) \tag{36}$$

можно написать

$$\overline{Q} \subset P = \bigcup_{\xi\in\Xi} P_\xi \subset \bigcup_{\xi\in\Xi} \mathring{Q}_\xi.$$

Таким образом, семейство $\{\mathring{Q}_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ открытых множеств образует покрытие замкнутого ограниченного множества $\overline{Q}$ и, стало быть, по теореме Бореля о покрытии из указанного покрытия можно выделить конечное. Последнее означает, что существует такое конечное множество $\Theta \subset \Xi$, что $\overline{Q} \subset \bigcup\limits_{\xi\in\Theta} \mathring{Q}_\xi$, и с учетом (36) тем более $Q \subset \bigcup\limits_{\xi\in\Theta} Q_\xi$. Функция μ обладает свойством полуаддитивности (следствие к лемме 1, п. 2.4). Поэтому

$$\mu Q \leqslant \sum_{\xi\in\Theta} \mu Q_\xi \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} \mu Q_\xi.$$

Принимая во внимание соотношения (34) и (35), получаем отсюда

$$\mu P \leqslant \mu Q + \varepsilon \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} (\mu P_\xi + \varepsilon_\xi) + \varepsilon = \sum_{\xi \in \Xi} \mu P_\xi + \sum_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi + \varepsilon = \sum_{\xi \in \Xi} \mu P_\xi + 2\varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε равносильно неравенству (33).

Лемма доказана.

2.6. Пусть $D = \Delta_1$ — промежуток расширенной числовой прямой $\overline{R}$ и g — вещественная конечная функция, заданная на D. Через $\mathfrak{P}_D^1$ обозначим систему всех полуоткрытых промежутков $[\alpha, \beta)$ $(\alpha \leqslant \beta)$, концы которых входят в D. Равенство

$$\mu P = g(\beta) - g(\alpha) \quad (P = [\alpha, \beta) \in \mathfrak{P}_D^1) \tag{37}$$

определяет, как видно из п. 2.1, на системе $\mathfrak{P}_D^1$ аддитивную функцию μ. Выясним условия, при которых функция μ является мерой.

Теорема 5 (2.I). *Для того чтобы функция μ, определенная на системе $\mathfrak{P}_D^1$ равенством* (37), *была мерой, необходимо и достаточно, чтобы функция g была возрастающей и непрерывной слева.*

Доказательство. Необходимость. Пусть μ — мера. Так как μ, в частности, неотрицательная функция, то из (37) сразу же вытекает монотонность функции g.

Рассмотрим далее произвольную точку x_0 промежутка D, не совпадающую с левым ее концом. Можно подобрать столь малое положительное число δ, что будет также $x_0 - \delta \in D$. Тем более точки $x_n = x_0 - \frac{\delta}{n} \in D$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, промежутки $P_n = [x_n, x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат системе $\mathfrak{P}_D^1$. Учитывая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = [x_0, x_0) = \Lambda$, в силу замечания 2 к теореме 4 (2.I) получим

$$0 = \mu\Lambda = \lim_{n \to \infty} \mu P_n = \lim_{n \to \infty} [g(x_n) - g(x_0)] = g(x_0 - 0) - g(x_0),$$

откуда и получаем непрерывность слева функции g в точке x_0.

Достаточность. Из условия теоремы немедленно вытекает положительность и конечность функции μ. Аддитивность ее была установлена в п. 2.1. при изучении примера 3.

Докажем счетную аддитивность функции μ. Рассмотрим сначала случай, когда промежуток D открыт слева, и убедимся, что при этом соблюдены требования леммы из п. 2.5 (разумеется, в том предположении, что удовлетворены условия теоремы).

В самом деле, пусть $\Delta = [\alpha, \beta)$. Тогда $\mu\Delta = g(\beta) - g(\alpha)$.

Ввиду непрерывности функции g в точке α слева имеем

$$\lim_{h \to +0} g(\alpha - h) = g(\alpha).$$

Положим $\Delta_h = [\alpha - h, \beta)$, где $h > 0$ столь мало, что $\Delta_h \in \mathfrak{P}_D^1$. Ясно, что $\mathring{\Delta}_h = (\alpha - h, \beta) \supset \Delta$ и $\mu\Delta_h = g(\beta) - g(\alpha - h) \xrightarrow[h \to +0]{} g(\beta) - g(\alpha) = \mu\Delta$. Тогда $\mu\Delta = \lim_{h \to +0} \mu\Delta_h \geqslant \inf_{\mathring{\Delta}' \supset \Delta} \mu\Delta'$. Так как обратное неравенство в силу монотонности функции μ очевидно, то $\mu\Delta = \inf\limits_{\overset{\circ}{\Delta'} \supset \Delta} \mu\Delta'$. Равенство $\mu\Delta = \sup\limits_{\overline{\Delta''} \subset \Delta} \mu\Delta''$ доказывается аналогично (при доказательстве, не умаляя общности, можно считать, что $\Delta \neq \Lambda$).

Рассмотрим теперь случай, когда D — замкнутый слева промежуток.

Пусть число a (может быть, равное $(-\infty)$) — левый конец промежутка D. Обозначим через D_0 промежуток, получающийся из D, удалением точки $a: D_0 = D \setminus \{a\}$. Через μ_0 обозначим сужение функции μ на систему $\mathfrak{P}^1_{D_0}$ (см. д. 1, п. 3):

$$\mu_0 Q = \mu Q \quad \left(Q \in \mathfrak{P}^1_{D_0}\right). \tag{38}$$

Легко понять, что μ_0 порождается сужением функции g на промежуток D_0. Функция μ_0 по доказанному счетно-аддитивна.

Докажем справедливость равенства

$$\mu P = \sum_{\xi \in \Xi} \mu P_\xi \tag{39}$$

для любого не более чем счетного семейства $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ попарно не пересекающихся промежутков системы $\mathfrak{P}^1_D$, объединение которого есть промежуток P, также принадлежащий системе $\mathfrak{P}^1_D$. Предположим, что

$$P = [\alpha, \beta); \; P_\xi = [\alpha_\xi, \beta_\xi) \quad (\xi \in \Xi).$$

Будем считать (это, очевидно, не уменьшает общности), что ни один из промежутков $P_\xi \neq \Lambda\,(\xi \in \Xi)$. При этом $\alpha \leqslant \alpha_\xi < \beta_\xi \leqslant \beta$ $(\xi \in \Xi)$. С другой стороны, раз $\alpha \in P = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} P_\xi$, то существует $\xi_0 \in \Xi$, для которого $\alpha \in P_{\xi_0}$, т. е. $\alpha_{\xi_0} \leqslant \alpha < \beta_{\xi_0}$. Вместе с предыдущим это дает $\alpha = \alpha_{\xi_0}$. Следовательно, $P \setminus P_{\xi_0} = [\alpha, \beta) \setminus [\alpha_{\xi_0}, \beta_{\xi_0}) = [\beta_{\xi_0}, \beta)$. Поскольку промежутки P_ξ $(\xi \in \Xi)$ попарно не пересекаются, $P \setminus P_{\xi_0} = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi_0} P_\xi$, где через Ξ_0 обозначено множество, получающееся из Ξ удалением элемента ξ_0. Поскольку $\beta_{\xi_0} > \alpha_{\xi_0} = \alpha \geqslant a$, промежуток $P \setminus P_{\xi_0} \in \mathfrak{P}^1_{D_0}$. Тем более $P_\xi \in \mathfrak{P}^1_{D_0}$ $(\xi \in \Xi_0)$. Ввиду счетной аддитивности функции μ_0 получаем отсюда с учетом (38)

$$\mu\left(P \setminus P_{\xi_0}\right) = \mu_0\left(P \setminus P_{\xi_0}\right) = \sum_{\xi \in \Xi_0} \mu_0 P_\xi = \sum_{\xi \in \Xi_0} \mu P_\xi.$$

В силу конечности функции μ будет, кроме того (см. п. 2.1), $\mu\left(P \setminus P_{\xi_0}\right) = \mu P - \mu P_{\xi_0}$. Подстановка этого в последнее равенство и приводит к (39).

Будучи конечной, функция μ σ-конечна (п. 2.4) и, следовательно, является мерой. Теорема полностью доказана.

Замечание. Пусть функция g удовлетворяет условиям теоремы. Применяя к мере μ, определяемой формулой (37), теорему 4, построим меру μ', заданную на кольце $\mathfrak{R}^1_D$ (см. замечание 2 к теореме 1 (1.1) и замечание 1 к теореме 4 (2.1)).

В дальнейшем (п. 3.8) мы увидим, что построенные таким образом меры приводят к важному классу мер — так называемым мерам Стилтьеса.

2.7. Лемма (см. п. 2.5) позволяет также доказать счетную аддитивность функции μ, рассмотренной в примере 4 из п. 2.1. Напомним, что эта функция была определена на системе $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν равенством

$$\mu P = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \ldots (\beta_\nu - \alpha_\nu), \tag{40}$$

где

$$P=[\alpha_1, \beta_1)\times[\alpha_2, \beta_2)\times\ldots\times[\alpha_\nu, \beta_\nu) \quad (\alpha_k\leqslant\beta_k);\quad k=1, 2, \ldots, \nu.$$

Теорема 6 (2.I). *Функция* μ, *определенная на системе* $\mathfrak{P}^\nu$ *равенством* (40), *является мерой.*

Доказательство. Неотрицательность и конечность функции μ очевидны. Поэтому нуждается в доказательстве только ее счетная аддитивность. Как и в предыдущей теореме, воспользуемся леммой из п. 2.5.

Для этого прежде всего заметим, что систему $\mathfrak{P}^\nu$ можно рассматривать как частный случай системы $\mathfrak{P}^\nu_D$, если под D понимать множество $R^\nu=(-\infty, +\infty)\times(-\infty, +\infty)\times\ldots\times(-\infty, +\infty)$. Далее, функция μ аддитивна (теорема 1 (2.I)), стало быть нуждаются в проверке лишь условия 1) и 2) леммы. Проверка эта осуществляется по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 5 (2.I), поэтому, чтобы не повторяться, мы подробно разберем только условие 1).

Мы должны доказать, что если $P=[\alpha_1, \beta_1)\times\ldots\times[\alpha_\nu, \beta_\nu)$, то

$$\mu P=\inf_{\substack{\overset{\circ}{P'}\supset P,\\ P'\in\mathfrak{P}^\nu}}\mu P'. \tag{41}$$

Положим $Q_h=[\alpha_1-h, \beta_1)\times\ldots\times[\alpha_\nu-h, \beta_\nu)$ ($h\in[0, +\infty)$). Очевидно, $P\subset\overset{\circ}{Q}_h$ при $h>0$. Функция φ, заданная на промежутке $[0, +\infty)$ равенством $\varphi(h)=\mu Q_h$, очевидно, непрерывна. Поэтому $\lim\limits_{h\to 0}\mu Q_h=\mu P$, и, следовательно,

$$\mu P=\lim_{h\to 0}\mu Q_h\geqslant\inf_{\substack{\overset{\circ}{P'}\supset P\\ P'\in\mathfrak{P}^\nu}}\mu P'.$$

Обратное неравенство очевидно, и равенство (41) доказано. Теорема доказана.

Замечание. Распространяя в соответствии с теоремой 4 функцию μ на кольцо $\mathfrak{R}^\nu$, мы образуем меру μ', заданную на этом кольце. Меру μ' при $\nu=2$ называют «площадью», а в случае $\nu\geqslant 3$ для обозначения меры μ' используется термин «объем».

§ 3. Лебеговское расширение меры. Мера Лебега μ_ν

Хотя областью задания меры может быть, строго говоря, любая система множеств, определение меры начинает действовать в полную силу только тогда, когда в качестве области задания фигурирует σ-кольцо. Между тем из рассмотренных выше примеров только в одном, наименее интересном, случае это требование было удовлетворено. Трудности задания мер на σ-кольцах объясняются тем, что структура конкретных σ-колец, вообще говоря, настолько сложна (см., например, сказанное по этому поводу в гл. I, п. 1.7), что обычно не удается высказать каких-либо простых признаков принадлежности произвольного множества рассматриваемому σ-кольцу.

Положение, однако, не столь безнадежно, как может показаться на первый взгляд. Как оказывается, всякую меру, заданную на кольце, можно распространить и, что очень важно, единственным образом на некоторое σ-кольцо так, что построенная при этом функция множества по-прежнему будет мерой. В частности, упомянутое распространение возможно для мер, описанных в теоремах 5(2.I) и 6(2.I) (см. замечания к этим теоремам).

Описание процесса распространения меры с кольца на σ-кольцо и составляет содержание настоящего параграфа.

На протяжении этого параграфа мы будем считать заданными кольцо $\mathfrak{R}$ подмножеств множества R^{ν} ($\nu = 1, 2, \ldots$) (см. гл. I, п. 1.3) и меру μ, определенную на $\mathfrak{R}$.

3.1. Предположим на время, что задача распространения меры μ решена, т. е. предположим, что построено σ-кольцо $\overline{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$ (I.1.6) и на нем определена мера $\overline{\mu} \supset \mu$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ σ-систему, порожденную кольцом $\mathfrak{R}$ (гл. I, п. 1.4). Каждое σ-множество S (т. е. множество, входящее в состав системы $\mathfrak{S}$) по самому определению представимо в виде объединения счетного семейства множеств из кольца $\mathfrak{R}$: $S = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_{\xi}$ $(A_{\xi} \in \mathfrak{R},\ \xi \in \Xi)$. Поскольку множества A_{ξ} $(\xi \in \Xi)$ принадлежат также и системе $\overline{\mathfrak{R}}$, которая, будучи σ-кольцом, замкнута относительно образования объединений счетных семейств множеств, то $S \in \overline{\mathfrak{R}}$. Следовательно, $\mathfrak{S} \subset \overline{\mathfrak{R}}$.

Пусть S — произвольное σ-множество. Рассмотрим какое-нибудь его монотонное представление:

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots;\ A_n \in \mathfrak{R},\ n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

На основании замечания 3 к теореме 3(2.I) будем иметь

$$\overline{\mu} S = \lim_{n \to \infty} \overline{\mu} A_n = \lim_{n \to \infty} \mu A_n. \tag{2}$$

Это соотношение открывает путь для определения значений меры на σ-множествах: дело в том, что правую часть равенства (2) — предел $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$, существование которого вытекает из монотонности функции μ, — мы можем подсчитать, даже и не предполагая существования искомой меры $\overline{\mu}$, и по определению принять его за $\overline{\mu} S$. Здесь, однако, возникает следующее затруднение. Формально $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$ зависит не только от множества S, но и от его монотонного представления (1). Если бы при выборе, вместо (1), другого монотонного представления множества S

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' \ (A_1' \subset A_2' \subset \ldots;\ A_n' \in \mathfrak{R};\ n = 1, 2, \ldots)$$

мы получили, что $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n \neq \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n'$, то это означало бы, что данную меру μ нельзя распространить с сохранением свойства быть мерой ни на какое σ-кольцо, содержащее данное кольцо $\mathfrak{R}$. В действительности указанного препятствия не существует, как следует из приведенного ниже предложения.

Предложение 1. Пусть S — σ-множество, имеющее монотонное представление (1). Если S_1 — также σ-множество, содержащееся в S, то, каково бы ни было его монотонное представление: $S_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^1$, справедливо неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \mu A_n^1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu A_n. \tag{3}$$

Доказательство. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ будет $A_k^1 \subset S_1 \subset S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Поэтому на основании следствия 1 к теореме 3 (2.I) можно написать $\mu A_k^1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu A_n$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что после перехода к пределу при $k \to \infty$ приводит к (3).

В частности, если в предложении 1 принять $S_1 = S$, то монотонные представления множества $S = S_1$, участвующие в формулировке предложения, становятся полностью равноправными, и мы можем написать неравенство, противоположное неравенству (3), т. е. получаем следующее утверждение.

Предложение 2. Если $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^1$ — произвольные монотонные представления множества $S \in \mathfrak{S}$, то $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \lim_{n\to\infty} \mu A_n^1$.

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} \mu A_n$ определяется только множеством S и не зависит от выбора монотонного представления этого множества.

Положим для каждого $S \in \mathfrak{S}$

$$\tilde{\mu} S = \lim_{n\to\infty} \mu A_n \quad \left(S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;\ A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots;\ A_n \in \mathfrak{R},\ n = 1, 2, \ldots\right). \tag{4}$$

В силу только что сказанного, этим равенством на системе $\mathfrak{S}$ задана функция $\tilde{\mu}$. О свойствах этой функции речь пойдет в следующих предложениях.

Предложение 3. Если σ-множество S входит в данное кольцо $\mathfrak{R}$, то $\tilde{\mu} S = \mu S$, т. е. функция $\tilde{\mu}$ служит распространением исходной меры μ.

Доказательство. В качестве монотонного представления множества S возьмем последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(A_n = S,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Перейдем к вопросу о счетной аддитивности функции $\tilde{\mu}$. Рассмотрим σ-множество S и предположим, что счетное семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ попарно не пересекающихся множеств $A_\xi \in \mathfrak{R}$ $(\xi \in \Xi)$ образует дизъюнктное представление множества S (см. гл. I, п. 1.4).

Предложение 4. Справедливо равенство

$$\tilde{\mu} S = \sum_{\xi \in \Xi} \mu A_\xi. \tag{5}$$

Доказательство. Здесь, как и в подобных случаях, встречавшихся выше, можно считать, что множество индексов Ξ совпадает с множеством N всех натуральных чисел. Введем множества $\tilde{A}_n = \bigcup_{\xi=1}^{n} A_\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эти множества входят в кольцо $\mathfrak{R}$ (гл. I, п. 1.3), образуют возрастающую последовательность и $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n = \bigcup_{\xi=1}^{\infty} A_\xi = S$. Иными словами, последовательность $\{\tilde{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ дает монотонное представление множества S. Поэтому в силу определения (4) $\tilde{\mu} S = \lim_{n\to\infty} \mu \tilde{A}_n$. Но ввиду аддитивности функции μ будет $\mu \tilde{A}_n =$

$= \sum_{\xi=1}^{n} \mu A_\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так что $\tilde{\mu} S = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu} \tilde{A}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\xi=1}^{n} \mu A_\xi = \sum_{\xi=1}^{\infty} \mu A_\xi$. Поскольку последний ряд положителен, его сумма совпадает с $\sum_{\xi \in \Xi} \mu A_\xi$ (д. 2, п. 4, замечание 1 к предл. 1).

Из предложения 4 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5. Функция $\tilde{\mu}$, задаваемая на σ-системе $\mathfrak{S}$ равенством (4), — счетно-аддитивна.

Доказательство. Рассмотрим не более чем счетное семейство $\{S_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ попарно не пересекающихся σ-множеств. Каждое из S_ξ представим в виде объединения последовательности $\{A_n^\xi\}_{n=1}^{\infty}$ $(\xi \in \Xi)$ попарно не пересекающихся множеств из кольца $\mathfrak{R}$: $S_\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\xi$.

Ясно, что семейство $\{A_n^\xi\}$ $((\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N})$ счетно и образует дизъюнктное представление множества $S = \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi$. Поэтому на основании предложения 4 $\tilde{\mu} S = \sum_{(\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N}} \mu A_n^\xi$. Но, используя результат из д. 2, п. 4, предл. 6, получим $\sum_{(\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N}} \mu A_n^\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} \mu A_n^\xi \right)$, и, еще раз применяя предложение 4, будем иметь $\sum_{n \in \mathbf{N}} \mu A_n^\xi = \tilde{\mu} S_\xi$. Следовательно, справедливо равенство $\tilde{\mu} S = \sum_{\xi \in \Xi} \tilde{\mu} S_\xi$, которое и означает счетную аддитивность функции $\tilde{\mu}$.

Хотя функция $\tilde{\mu}$ счетно-аддитивна и, как вытекает из определения, неотрицательна, к ней нельзя применить теорему 2 (2.I), так как, вообще говоря, область задания функции $\tilde{\mu}$ — σ-система $\mathfrak{S}$ — не является кольцом. Тем не менее функция $\tilde{\mu}$ обладает всеми свойствами, о которых упоминается в указанной теореме.

Предложение 6. Функция $\tilde{\mu}$ монотонна.

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием предложения 1.

Предложение 7. Каковы бы ни были σ-множества S_1 и S_2, если хотя бы одно из чисел $\tilde{\mu} S_1$ или $\tilde{\mu} S_2$ конечно, имеет место равенство

$$\tilde{\mu} (S_1 \cup S_2) = \tilde{\mu} S_1 + \tilde{\mu} S_2 - \tilde{\mu} (S_1 \cap S_2). \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим монотонные представления $S_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^1$ и $S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^2$. Последовательности $\{A_n^1 \cup A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{A_n^1 \cap A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ образуют тогда монотонные представления σ-множеств $S_1 \cup S_2$ и, соответственно, $S_1 \cap S_2$ (гл. I, п. 1.4, предл. 3 и 2). Но пункт 2) теоремы 2 (2.I) дает

$$\mu (A_n^1 \cup A_n^2) = \mu A_n^1 + \mu A_n^2 - \mu (A_n^1 \cap A_n^2) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Учитывая сказанное выше, получаем отсюда равенство (6) с помощью предельного перехода при $n \to \infty$.

Из (6) можно было бы вывести свойство полуаддитивности функции $\tilde{\mu}$ (см. п. 3) теоремы 2 (2.I). Однако мы сразу докажем счетную полуаддитивность, из которой полуаддитивность вытекает очевидным образом.

Предложение 8. Функция $\tilde{\mu}$ — счетно-полуаддитивна, т. е. каковы бы ни были σ-множество S и не более чем счетное семейство $\{S_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ σ-множеств, включение $S \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi$ влечет неравенство $\tilde{\mu}S \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} \tilde{\mu}S_\xi$.

Доказательство. Пусть, как и при доказательстве предложения 5, последовательности $\{A_n^\xi\}_{n=1}^\infty$ образуют дизъюнктные представления множеств S_ξ $(\xi \in \Xi)$: $S_\xi = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n^\xi$. Одновременно с этим рассмотрим монотонное представление множества S: $S = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Поскольку

$$A_k \subset S \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi = \bigcup_{(\xi,\, n) \in \Xi \times \mathbf{N}} A_n^\xi \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

то ввиду счетной полуаддитивности функции μ будет

$$\mu A_k \leqslant \sum_{(\xi,\, n) \in \Xi \times \mathbf{N}} \mu A_n^\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \Big(\sum_{n \in \mathbf{N}} \mu A_n^\xi \Big) = \sum_{\xi \in \Xi} \tilde{\mu} S_\xi.$$

При $k \to \infty$ приходим к требуемому неравенству.

Функция $\tilde{\mu}$ так же, как и μ, представляет собой меру. Для этого достаточно установить следующее:

Предложение 9. Функция $\tilde{\mu}$ — σ-конечна (см. гл. I, п. 2.4).

Доказательство. Пусть S — произвольное σ-множество. Это означает, что существует такое счетное семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств из кольца $\mathfrak{R}$, что $S = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$. Ввиду того, что μ — мера и, стало быть, σ-конечная функция, для каждого множества A_ξ $(\xi \in \Xi)$ можно подобрать (см. гл. 1, п. 2.4) такую последовательность $\{A_n^\xi\}_{n=1}^\infty$ множеств из кольца $\mathfrak{R}$, что

$$A_\xi \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n^\xi, \quad \mu A_n^\xi < +\infty \quad (n = 1, 2, \ldots; \xi \in \Xi).$$

Семейство $\{A_n^\xi\}$ $((\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N})$ — счетное. Множества A_n^ξ входят в кольцо $\mathfrak{R}$ и, тем более, в систему $\mathfrak{S}$; очевидно, кроме того, $S \subset \bigcup_{(\xi,\, n) \in \Xi \times \mathbf{N}} A_n^\xi$. Остается заметить, что в силу предложения 3 $\tilde{\mu} A_n^\xi = \mu A_n^\xi < +\infty$ $((\xi, n) \in \Xi \times \mathbf{N})$.

3.2. В предыдущем пункте данная мера μ была распространена на σ-систему $\mathfrak{S}$, порожденную данным кольцом $\mathfrak{R}$. Так как наша цель состоит в распространении меры μ на σ-кольцо, а система $\mathfrak{S}$ таковой, вообще говоря, не является, то процесс распространения на этом не заканчивается. Ниже мы построим распространение меры $\tilde{\mu}$, а тем самым и исходной меры μ на весьма обширную систему множеств, которая во многих важных случаях состоит просто из всех подмножеств множества R^ν. Эта система всегда будет σ-кольцом, но беда в том, что образованное распространение функции $\tilde{\mu}$ уже не будет, как правило, мерой — при распространении утрачивается свойство счетной и даже конечной аддитивности. Однако, несколько сузив область определения, мы сможем восстановить это свойство.

Пусть E—произвольное подмножество множества R^ν. Обозначим через $\mathfrak{S}_E$ систему всех σ-множеств, содержащих E. Иными словами $\mathfrak{S}_E = \{S \in \mathfrak{S}: S \supset E\}$. Не исключено, что $\mathfrak{S}_E = \Lambda$. Например, если все множества, входящие в кольцо $\mathfrak{R}$, содержатся в некотором данном множестве $A_0 \neq R^\nu$, то этим же свойством, понятно, будет обладать и каждое σ-множество. Следовательно, если $E \supset A_0$ и $E \neq A_0$, то в рассматриваемом случае $\mathfrak{S}_E = \Lambda$.

Однако, каково бы ни было кольцо $\mathfrak{R}$, всегда можно указать множество E, для которого система $\mathfrak{S}_E \neq \Lambda$. Этим свойством, очевидно, будет обладать любое σ-множество и, в частности, любое множество из кольца $\mathfrak{R}$.

Отметим еще, что если само множество R^ν входит в систему $\mathfrak{S}$ (так будет, например, в случае, когда $\mathfrak{R}$ — кольцо, порожденное системой $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников (гл. I, п. 1.3)), то $\mathfrak{S}_E \neq \Lambda$ для любого множества $E \subset R^\nu$.

Через $\mathfrak{R}^*$ обозначим систему, состоящую из таких подмножеств E множества R^ν, для которых $\mathfrak{S}_E \neq \Lambda$. Как только что было указано, $\mathfrak{R}^* \supset \mathfrak{S}$.

Вновь образованная система $\mathfrak{R}^*$ обладает свойством *наследственности:* если какое-либо множество $E \in \mathfrak{R}^*$, а другое множество $e \subset E$, то и $e \in \mathfrak{R}^*$.

Это утверждение, впрочем, и непосредственно очевидное, вытекает из того замечания, что соотношение $e \subset E$ влечет включение $\mathfrak{S}_e \supset \mathfrak{S}_E$.

Предложение 1. Система $\mathfrak{R}^*$ является σ-кольцом.

Доказательство. Первое условие определения (гл. I, п. 1.6) обеспечено включением $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}^*$. Проверим второе условие. Пусть $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство множеств, входящих в состав системы $\mathfrak{R}^*$. По определению это означает, что $\mathfrak{S}_{E_\xi} \neq \Lambda$ $(\xi \in \Xi)$, т. е. для каждого $\xi \in \Xi$ можно указать σ-множество $S_\xi \supset E_\xi$. Согласно предложению 1 из гл. I, п. 1.4, объединение $S = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} S_\xi$ представляет собой также σ-множество, причем, очевидно, $S \supset \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$, а наличие подобного рода соотношения как раз и служит признаком того, что множество, в данном случае $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$, принадлежит системе $\mathfrak{R}^*$. Наконец, третье условие определения σ-кольца для системы $\mathfrak{R}^*$ выполнено ввиду свойства наследственности, которым она обладает: если множества E_1, $E_2 \in \mathfrak{R}^*$, то, поскольку разность $E_1 \setminus E_2 \subset E_1$, можно утверждать, что она входит в состав $\mathfrak{R}^*$.

Определение 1. Рассмотрим функцию μ^*, заданную на системе $\mathfrak{R}^*$ следующим образом:

$$\mu^* E = \inf_{S \in \mathfrak{S}_E} \tilde{\mu} S \quad (E \in \mathfrak{R}^*). \tag{7}$$

Эта функция называется *внешней мерой* (порожденной данной мерой μ).

Легко понять, что μ^* представляет собой распространение меры $\tilde{\mu}$ и, тем самым, распространение исходной меры μ. Действительно, если E — σ-множество, то, очевидно, $E \in \mathfrak{S}_E$. Следовательно, $\mu^* E = \inf\limits_{S \in \mathfrak{S}_E} \tilde{\mu} S \leqslant \tilde{\mu} E$. С другой стороны, каждое множество $S \in \mathfrak{S}_E$ содержит E, значит ввиду монотонности меры $\tilde{\mu}$ (см. п. 3.1, предл. 6) должно быть $\tilde{\mu} E \leqslant \tilde{\mu} S$ $(S \in \mathfrak{S}_E)$, что приводит к неравенству $\tilde{\mu} E \leqslant \mu^* E$.

Свойства внешней меры μ^* содержатся в следующей теореме.

Теорема 1 (3.I). *Внешняя мера μ^* представляет собой неотрицательную монотонную счетно-полуаддитивную σ-конечную функцию.*

Доказательство. Неотрицательность μ^* ясна из определения.

Пусть, далее, множества $E_1, E_2 \in \mathfrak{R}^*$, причем $E_1 \subset E_2$. Как было указано выше, последнее соотношение влечет включение $\mathfrak{S}_{E_1} \supset \mathfrak{S}_{E_2}$, так что

$\inf\limits_{S \in \mathfrak{S}_{E_1}} \tilde{\mu} S \leqslant \inf\limits_{S \in \mathfrak{S}_{E_2}} \tilde{\mu} S$, т. е. $\mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2$.

Рассмотрим теперь не более чем счетное семейство $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств из системы $\mathfrak{R}^*$. Предположим, что множество $E \subset \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Поскольку система $\mathfrak{R}^*$ — σ-кольцо, объединение $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi \in \mathfrak{R}^*$, а тогда, учитывая свойство наследственности системы $\mathfrak{R}^*$, можно утверждать, что и $E \in \mathfrak{R}^*$. При доказательстве неравенства $\mu^* E \leqslant \sum\limits_{\xi \in \Xi} \mu^* E_\xi$ мы можем ограничиться рассмотрением лишь того случая, когда $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \mu^* E_\xi < +\infty$.* При этом условии будет, разумеется, и $\mu^* E_\xi < +\infty$ $(\xi \in \Xi)$.

Возьмем произвольное вещественное число $\varepsilon > 0$ и подберем такое не более чем счетное семейство $\{\varepsilon_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ положительных чисел, чтобы было $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi = \varepsilon$ (д. 2, п. 5). В соответствии с (7) для каждого $\xi \in \Xi$ можно будет найти тогда такое σ-множество S_ξ, что

$$S_\xi \supset E_\xi; \quad \tilde{\mu} S_\xi \leqslant \mu^* E_\xi + \varepsilon_\xi. \tag{8}$$

Объединение $S = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} S_\xi$ — σ-множество, содержащее, очевидно, множество E, т. е. $S \in \mathfrak{S}_E$. Поэтому $\mu^* E \leqslant \mu^* S$. Но ввиду счетной полуаддитивности меры $\tilde{\mu}$ (п. 3.1, предл. 8) $\mu^* S \leqslant \sum\limits_{\xi \in \Xi} \tilde{\mu} S_\xi$. Следовательно, принимая во внимание неравенство (8), а также учитывая выбор семейства $\{\varepsilon_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, получим $\mu^* E \leqslant \sum\limits_{\xi \in \Xi} \mu^* E_\xi + \varepsilon$, что ввиду произвольности ε равносильно доказываемому неравенству.

Что касается σ-конечности функции μ^*, то она почти очевидным образом вытекает из σ-конечности функции $\tilde{\mu}$ (п. 3.1, предл. 9). В самом деле, если множество $E \in \mathfrak{R}^*$, то, стало быть, существует σ-множество $S \supset E$. Вследствие σ-конечности меры $\tilde{\mu}$ найдется счетное семейство $\{S_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ σ-множеств, такое, что

$$E \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi, \quad \mu^* S_\xi < +\infty \ (\xi \in \Xi).$$

3.3. Как уже было сказано, внешняя мера μ^* в общем случае не может быть принята в качестве решения сформулированной в начале параграфа задачи, поскольку, вообще говоря, она не обладает свойством счетной и даже конечной аддитивности. Причиной последнего обстоятельства является то, что область определения функции μ^* — система $\mathfrak{R}^*$ — слишком обширна. (В п. 3.5 будет дано более точное объяснение этого факта.) Удается, однако, так сузить область определения, сохранив за ней свойство быть σ-кольцом, что на этой «урезанной» системе счетная аддитивность восстанавливается. Оказывается, что в качестве критерия — оставить данное множество из $\mathfrak{R}^*$ в суженной системе или нет — можно принять характер приближения рассматриваемого множества с помощью σ-множеств. Дадим точное определение.

---

* Вследствие неотрицательности функции μ^* сумма $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \mu^* E_\xi$ всегда существует.

Определение 1. Множество $E \in \mathfrak{R}^*$ назовем *измеримым* (относительно внешней меры μ^*), если для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ существует такое σ-множество $S \supset E$, т. е. $S \in \mathfrak{S}_E$, что $\mu^*(S \setminus E) \leqslant \varepsilon$.

Систему всех измеримых множеств обозначим через $\overline{\mathfrak{R}}$. Понятно, что $\overline{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{R}^*$.

Если E — σ-множество, то, принимая $S = E$, получим $\mu^*(S \setminus E) = \mu^*\Lambda = \tilde{\mu}\Lambda = \mu\Lambda = 0$. Таким образом, каждое σ-множество измеримо, т. е. $\mathfrak{S} \subset \overline{\mathfrak{R}}$.

Кроме σ-множеств, имеются, вообще говоря, и другие измеримые множества.

Определение 2. Будем говорить, что множество $e \in \mathfrak{R}^*$ является *множеством меры нуль*, если $\mu^* e = 0$. Систему всех множеств меры нуль обозначим через $\mathfrak{N}$.

Предложение 1. $\mathfrak{N}$ есть σ-кольцо, обладающее свойством наследственности (п. 3.2).

Доказательство. Если $e \in \mathfrak{N}$ и множество $e_1 \subset e$, то $e_1 \in \mathfrak{R}^*$ и по монотонности внешней меры $0 \leqslant \mu^* e_1 \leqslant \mu^* e = 0$, т. е. $\mu^* e_1 = 0$. Понятно, что пустое множество есть множество меры нуль. Если, далее, имеется не более чем счетное семейство $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств меры нуль и $e = \bigcup_{\xi \in \Xi} e_\xi$, то вследствие счетной полуаддитивности функции μ^* будет $0 \leqslant \mu^* e \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} \mu^* e_\xi = 0$. Таким образом, $e \in \mathfrak{N}$. Наконец, то, что разность двух множеств меры нуль является множеством меры нуль, обусловлено свойством наследственности системы $\mathfrak{N}$.

Предложение 2. Каждое множество e меры нуль измеримо, т. е. $\mathfrak{N} \subset \overline{\mathfrak{R}}$.

Доказательство. В самом деле, по определению внешней меры, $0 = \mu^* e = \inf_{S \in \mathfrak{S}_e} \tilde{\mu} S$. Следовательно, взяв число $\varepsilon > 0$, можно подобрать множество $S \in \mathfrak{S}_e$ так, что $\tilde{\mu} S \leqslant \varepsilon$. Но разность $S \setminus e \subset S$, стало быть, ввиду монотонности функции μ^* будет $\mu^*(S \setminus e) \leqslant \mu^* S = \tilde{\mu} S \leqslant \varepsilon$, а это и означает измеримость множества e.

Предложение 3. Предположим, что $\mathfrak{R}$ — это кольцо $\mathfrak{R}^\nu$ и μ — функция, введенная в замечании к теореме 6 (2.I). Тогда для того чтобы множество $e \subset R^\nu$ было множеством меры нуль, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ можно было указать такое счетное семейство $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ полуоткрытых прямоугольников размерности ν, что $e \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} P_\xi$ и $\sum_{\xi \in \Xi} \mu P_\xi \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Если $e \in \mathfrak{N}$, то по числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать σ-множество $S \supset e$ такое, что $\tilde{\mu} S \leqslant \varepsilon$. Но в рассматриваемом случае каждое σ-множество, в том числе и S, допускает представление в виде объединения счетного семейства попарно не пересекающихся полуоткрытых прямоугольников (гл. I, п. 1.5). Пусть $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — указанное семейство, участвующее в представлении множества $S : S = \bigcup_{\xi \in \Xi} P_\xi$. Согласно предложению 3 из п. 3.1 (ведь $P_\xi \in \mathfrak{R}^\nu$ при каждом $\xi \in \Xi$!) можем написать $\tilde{\mu} S = \sum_{\xi \in \Xi} \mu P_\xi$. Следовательно, последняя сумма не превосходит ε. Достаточность условия проверяется еще проще. Воспользовавшись счетной полуаддитивностью внешней меры, получим $\mu^* e \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} \mu^* P_\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \mu P_\xi \leqslant \varepsilon$, а это ввиду произвольности ε возможно только, когда $\mu^* e = 0$.

Замечание. Под сформулированный выше признак подходит любое не более чем счетное множество $e \subset R^{\nu}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{x\}$, состоящее из одной точки $x=(x_1, \ldots, x_{\nu})$. Ясно, что $\{x\} \subset [x_1, x_1+\delta) \times \ldots \times [x_{\nu}, x_{\nu}+\delta)$, каково бы ни было положительное число δ, и потому $\mu^*\{x\}=0$. Теперь заметим, что любое не более чем счетное множество e представимо в виде объединения не более чем счетного семейства одноэлементных множеств: $e=\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}\{x_{\xi}\}$. Воспользуемся счетной полуаддитивностью внешней меры μ^* (теорема 1 (3.I)):

$$\mu^* e \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} \mu^*\{x\}=0.$$

Замечание доказано.

Не следует думать, что в рассматриваемом случае других множеств меры нуль, кроме счетных или конечных, нет. Предоставляем читателю построить пример несчетного (д. 1, п. 7) бесконечного множества меры нуль (см. § 4).

Возвращаясь к общему случаю, сформулируем важную для дальнейшего теорему, содержащую информацию о структуре произвольного измеримого множества.

Теорема 2 (3.I). *Пусть E — измеримое множество. Существует убывающая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ σ-множеств и множество e меры нуль, такие, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n = E \cup e$, $E \cap e = \Lambda$, т. е.*

$$E=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)\setminus e.$$

Если при этом $\mu^* E < +\infty$, то последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать так, что $\mu^* S_n < +\infty$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Беря в определении измеримого множества в качестве ε последовательно числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, найдем последовательность $\left\{S_n^0\right\}_{n=1}^{\infty}$ таких σ-множеств, что

$$S_n^0 \supset E; \ \mu^*\left(S_n^0\setminus E\right) < \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{8a}$$

Положим, далее, $S_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n} S_k^0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Каждое S_n — σ-множество (см. гл. I, п. 1.4, предл. 2). Понятно, что $S_n \supset E$ $(n=1, 2, \ldots)$, а так как $S_n \setminus E \subset S_n^0 \setminus E$, то ввиду монотонности внешней меры $\mu^*(S_n\setminus E) \leqslant \mu^*\left(S_n^0\setminus E\right) \leqslant \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Таким образом, последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (8a). Кроме того, она, очевидно, убывающая.

Введем множество $e=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(S_n\setminus E)$. Поскольку $e \subset S_n \setminus E$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $S_n\setminus E \in \mathfrak{R}^*$, то $e \in \mathfrak{R}^*$. При этом $\mu^* e \leqslant \mu^*(S_n\setminus E) \leqslant \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, что возможно лишь в случае, когда $\mu^* e = 0$, т. е. когда $e \in \mathfrak{R}$.

Заметив, что пересечение $e = \bigcap_{n=1}^{\infty} (S_n \setminus E)$ можно записать в виде разности $e = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \right) \setminus E$, получим отсюда искомое представление множества E.

Предположим теперь дополнительно, что $\mu^* E < +\infty$. Так как $S_n = E \cup (S_n \setminus E)$, то вследствие полуаддитивности внешней меры $\mu^* S_n \leqslant \mu^* E + \mu^* (S_n \setminus E) \leqslant \mu^* E + \frac{1}{n} < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Замечание. Пусть (в условиях теоремы) дано σ-множество $S_0 \supset E$; тогда последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и множество e можно выбрать так, что $S_n \subset S_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $e \subset S_0$. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно в доказательстве теоремы заменить множества S_n пересечениями $S_n \cap S_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Как легко понять, они обладают всеми теми же свойствами, что и S_n, и, сверх того, содержатся в S_0. Поскольку при такой замене роль множества e будет играть пересечение $e \cap S_0$, утверждение относительно e также становится очевидным.

Заметим, что в качестве S_0 может, конечно, выступать и множество из исходного кольца $\mathfrak{R}$.

3.4. Теорема 3 (3.I). *Система $\overline{\mathfrak{R}}$ всех измеримых множеств представляет собой σ-кольцо.*

Доказательство. Первое условие из определения σ-кольца (см. гл. I, п. 1.6), очевидно, выполнено потому, что $\mathfrak{R} \subset \overline{\mathfrak{R}}$, а $\mathfrak{R}$, будучи кольцом, включает пустое множество.

Нетрудно убедиться и в наличии второго условия — замкнутости системы $\overline{\mathfrak{R}}$ относительно операции объединения не более чем счетных семейств множеств. Пусть $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство измеримых множеств. Положим $E = \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем семейство $\{\varepsilon_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ положительных чисел, сумма которого равна ε (д. 2, п. 5). Поскольку каждое множество E_ξ $(\xi \in \Xi)$ измеримо, можно подобрать такие σ-множества S_ξ, что

$$S_\xi \supset E_\xi, \quad \mu^* (S_\xi \setminus E_\xi) \leqslant \varepsilon_\xi \quad (\xi \in \Xi). \tag{9}$$

Объединение $S = \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi$ — это σ-множество (гл. I, п. 1.4, предл. 1), содержащее множество E. Но, как легко проверить, $S \setminus E \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} (S_\xi \setminus E_\xi)$, так что, учитывая счетную полуаддитивность внешней меры (теорема 1 (3.I)), будем иметь на основании (9)

$$\mu^* (S \setminus E) \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} \mu^* (S_\xi \setminus E_\xi) \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi = \varepsilon.$$

Тем самым установлена измеримость множества E.

Сложнее проверяется третье условие, касающееся разности.

Рассмотрим измеримые множества E_1 и E_2. Докажем, что разность $E_1 \setminus E_2$ также представляет собой измеримое множество. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1) Предположим сначала, что $E_1 = S_1$ и $E_2 = S_2$ суть σ-множества, причем $S_2 \subset S_1$ и $\mu^* S_1 < +\infty$. Рассмотрим какое-либо монотонное представление множества S_2 (см. гл. I, п. 1.4): $S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. При любом n $(n = 1, 2, \ldots)$ разность $S_1 \setminus A_n$ является σ-множеством. Действительно, из определения σ-множества (гл. I, п. 1.4) следует, что существует такое счетное семейство

$\{A_\xi^1\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств из кольца $\mathfrak{R}$, что $S_1 = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi^1$. Но, очевидно, $S_1 \setminus A_n = \bigcup_{\xi \in \Xi} (A_\xi^1 \setminus A_n)$ и разности $A_\xi^1 \setminus A_n$ $(\xi \in \Xi)$ принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$. Отсюда и вытекает справедливость высказанного утверждения.

Итак, $S_1 \setminus A_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ — σ-множество. Поскольку $A_n \subset S_2$ $(n = 1, 2, \dots)$, $S_1 \setminus A_n$, наоборот, содержит разность $S_1 \setminus S_2$. Вместе с тем, как легко проверить, $(S_1 \setminus A_n) \setminus (S_1 \setminus S_2) = S_2 \setminus A_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Но $S_2 \setminus A_n$ — также σ-множество, поэтому, учитывая свойство субтрактивности (гл. I, п. 2.1) аддитивной функции $\tilde{\mu}$ (п. 3.1, предл. 5), получим

$$\mu^* [(S_1 \setminus A_n) \setminus (S_1 \setminus S_2)] = \mu^* (S_2 \setminus A_n) = \tilde{\mu} (S_2 \setminus A_n) =$$

$$= \tilde{\mu} S_2 - \mu A_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Согласно определению функции $\tilde{\mu}$, имеем $\mu A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \tilde{\mu} S_2$, так что для достаточно больших n разность $\tilde{\mu} S_2 - \mu A_n$ будет сколь угодно мала. Таким образом, оказалось возможным погрузить множество $S_1 \setminus S_2$ в σ-множество $S_1 \setminus A_n$ так, что внешняя мера разности сколь угодно мала. Точнее, каково бы ни было положительное число ε, множество $S_1 \setminus S_2$ можно погрузить в некоторое σ-множество ($S_1 \setminus A_n$ с надлежащим номером n) так, что внешняя мера разности меньше ε. Это и означает измеримость множества $S_1 \setminus S_2$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $E_1 = S_1$ и $E_2 = S_2$ — произвольные σ-множества. Согласно предложению 9 из п. 3.1, можно указать такое счетное семейство $\{S_\xi^1\}$ $(\xi \in \Xi)$ σ-множеств, что

$$S_1 \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi^1, \quad \mu^* S_\xi^1 = \tilde{\mu} S_\xi^1 < +\infty \quad (\xi \in \Xi).$$

Можно, более того, считать, что $S_1 = \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi^1$, так как в противном случае мы заменим каждое множество S_ξ^1 пересечением $S_1 \cap S_\xi^1$, которое также является σ-множеством (гл. I, п. 1.4, предл. 2). При этом $S_1 = S_1 \cap \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi^1 = \bigcup_{\xi \in \Xi} (S_1 \cap S_\xi^1)$, а ввиду монотонности меры $\tilde{\mu}$ (п. 3.1, предл. 6) $\tilde{\mu} (S_1 \cap S_\xi^1) \leqslant \tilde{\mu} S_\xi^1 < +\infty$ $(\xi \in \Xi)$.

Нетрудно видеть, что при сделанном предложении

$$S_1 \setminus S_2 = \bigcup_{\xi \in \Xi} (S_\xi^1 \setminus S_2) = \bigcup_{\xi \in \Xi} [S_\xi^1 \setminus (S_\xi^1 \cap S_2)].$$

Снова вспоминая предложение 2 из п. 1.4, видим, что пересечение $S_\xi^1 \cap S_2$ является σ-множеством при любом $\xi \in \Xi$. Оно содержится в множестве S_ξ^1, и потому для разности $S_\xi^1 \setminus (S_\xi^1 \cap S_2)$ выполнены все предположения предыдущего пункта, вследствие чего справедливо заключение о ее измеримости. Но объединение счетного семейства измеримых множеств само измеримо. Значит, $S_1 \setminus S_2 \in \overline{\mathfrak{R}}$.

3) Пусть по-прежнему $E_1 = S$ — σ-множество, а $E_2 = E$ — произвольное измеримое множество, содержащееся в S. В соответствии с теоремой 2 представим E в виде $E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) \setminus e$, где $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последователь-

ность σ-множеств, а e — множество меры нуль. Согласно замечанию к теореме 2, можно считать, что $S_n \subset S$ $(n=1, 2, \ldots)$, $e \subset S$. Запишем разность $S \setminus E$ в виде (см. д. I, п. 6, предл. 2)

$$S \setminus E = e \cup \left[S \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \right] = e \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (S \setminus S_n).$$

Множество e, будучи множеством меры нуль, измеримо (п. 3.3, предл. 2); как показано в пункте 2), измеримы также и множества $S \setminus S_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Стало быть, разность $S \setminus E$ представлена в виде объединения счетного семейства измеримых множеств, т. е. по доказанному в начале измерима.

4) Рассмотрим, наконец, общий случай, когда и E_1 и E_2 — произвольные измеримые множества. Найдем какие-нибудь σ-множества $S_1 \supset E_1$ и $S_2 \supset E_2$. (Такие множества существуют, ведь измеримые множества входят в систему $\mathfrak{R}^*$!). Объединение $S = S_1 \cup S_2$ будет σ-множеством (гл. I, п. 1.4, предл. 1), содержащим как E_1, так и E_2. Представим разность $E_1 \setminus E_2$ в виде

$$E_1 \setminus E_2 = S \setminus [(S \setminus E_1) \cup E_2].$$

Множество $S \setminus E_1$ измеримо в силу пункта 3). Но тогда можно утверждать, что и объединение $(S \setminus E_1) \cup E_2$ измеримо. Снова используя пункт 3), установим измеримость разности $S \setminus [(S \setminus E_1) \cup E_2]$, т. е. измеримость множества $E_1 \setminus E_2$.

3.5. Обратимся к изучению свойств внешней меры μ^* (точнее, ее сужения) на σ-кольце измеримых множеств $\overline{\mathfrak{R}}$.

Рассмотрим два не пересекающихся множества из системы $\mathfrak{R}^*$. Может случиться, что как бы ни выбирать объемлющие их σ-множества, они будут сильно налегать друг на друга и внешняя мера их пересечения всегда будет велика (схема этого явления в очень примитивном виде, разумеется, изображена на рис. 3). Именно этим обстоятельством и объясняется то, что внешняя мера не обладает свойством аддитивности.

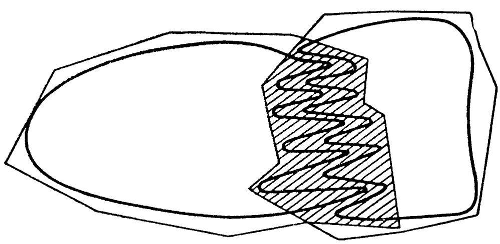

Рис. 3.

Лемма. *Пусть E_1 и E_2 — множества, входящие в состав системы $\mathfrak{R}^*$. Предположим, что $\mu^* E_1, \mu^* E_2 < +\infty$. Для того чтобы было справедливо равенство*

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^* E_1 + \mu^* E_2, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовали σ-множества S_1 и S_2, такие, что

$$S_1 \supset E_1, \quad S_2 \supset E_2, \quad \tilde{\mu}(S_1 \cap S_2) \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Доказательство. Достаточность. Положим $E = E_1 \cup E_2$. Так как $\mu^* E \leqslant \mu^* E_1 + \mu^* E_2$ (полуаддитивность внешней меры, теорема 1), то $\mu^* E < +\infty$. Поэтому, взяв число $\varepsilon > 0$, вследствие (7) можно найти такое σ-множество $S_0 \supset E$, что $\mu^* E \geqslant \tilde{\mu} S_0 - \varepsilon$. Подберем далее σ-множества S_1 и S_2 так, чтобы выполнялось (11). При этом можно считать, что как S_1, так и S_2 содержатся в S_0. В противном случае мы заменим S_i пересечением $S_i \cap S_0$

$(i=1, 2)$. Ясно, что (11) от такой замены не нарушится. Принимая во внимание предложения 6 и 7 из п. 3.1, можем написать цепочку неравенств

$$\mu^*E \geqslant \tilde{\mu}S_0 - \varepsilon \geqslant \tilde{\mu}(S_1 \cup S_2) - \varepsilon = \tilde{\mu}S_1 + \tilde{\mu}S_2 - \tilde{\mu}(S_1 \cap S_2) - \varepsilon \geqslant$$
$$\geqslant \tilde{\mu}S_1 + \tilde{\mu}S_2 - 2\varepsilon \geqslant \mu^*E_1 + \mu^*E_2 - 2\varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε вытекает соотношение $\mu^*E \geqslant \mu^*E_1 + \mu^*E_2$. Справедливость противоположного неравенства отмечалась выше.

Необходимость. Пусть условие леммы нарушено. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любых σ-множеств S_1 и S_2 соотношения $S_1 \supset E_1$ и $S_2 \supset E_2$ влекут за собой неравенство $\tilde{\mu}(S_1 \cap S_2) > \varepsilon_0$. Выберем σ-множества S_1 и S_2 так, чтобы было

$$S_i \supset E_i, \quad \tilde{\mu}S_i \leqslant \mu^*E_i + \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (i=1, 2).$$

Тогда

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) \leqslant \tilde{\mu}(S_1 \cup S_2) = \tilde{\mu}S_1 + \tilde{\mu}S_2 - \tilde{\mu}(S_1 \cap S_2) < \mu^*E_1 + \mu^*E_2,$$

что противоречит условию (10). Лемма доказана.

Основываясь на лемме, докажем, что на измеримых множествах внешняя мера μ^* обладает свойством счетной аддитивности. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4(3.1). *Пусть* $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся измеримых множеств и* $E = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$. *Тогда*

$$\mu^*E = \sum_{\xi \in \Xi} \mu^*E_\xi. \tag{12}$$

Доказательство. Равенство (12) нуждается в доказательстве лишь в том случае, когда $\mu^*E_\xi < +\infty$ $(\xi \in \Xi)$, что мы и будем предполагать. Рассмотрим сначала случай, когда множество Ξ индексов конечно и, более того, содержит два элемента. Пусть, например, $\Xi = \{\xi, \eta\}$. Следуя определению измеримого множества (п. 3.3), подберем по числу $\varepsilon > 0$ такие σ-множества S_1 и S_2, что

$$S_1 \supset E_\xi, \quad S_2 \supset E_\eta, \quad \mu^*(S_1 \setminus E_\xi) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(S_2 \setminus E_\eta) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Проверим далее соотношение

$$S_1 \cap S_2 \subset (S_1 \setminus E_\xi) \cup (S_2 \setminus E_\eta). \tag{14}$$

Действительно, если элемент $x \in S_1 \cap S_2$, то это означает, что $x \in S_1$ и $x \in S_2$. Между тем, поскольку по условию множества E_ξ и E_η не пересекаются, x не может принадлежать обоим этим множествам. Стало быть, x входит в состав по крайней мере одной из разностей $S_1 \setminus E_\xi$ или $S_2 \setminus E_\eta$, а тогда он будет элементом и их объединения.

В силу полуаддитивности внешней меры (теорема 1) на основании (13) и (14) получаем

$$\tilde{\mu}(S_1 \cap S_2) = \mu^*(S_1 \cap S_2) \leqslant \mu^*(S_1 \setminus E_\xi) + \mu^*(S_2 \setminus E_\eta) < \varepsilon.$$

Таким образом, для множеств E_ξ и E_η удовлетворено условие леммы, и поэтому $\mu^*(E_\xi \cup E_\eta) = \mu^*E_\xi + \mu^*E_\eta$.

Возьмем натуральное число $n > 2$ и предположим, что равенство (12) доказано, если Ξ — конечное множество, число элементов которого равно $n-1$. Докажем утверждение теоремы для случая, когда множество Ξ имеет n элементов. Пусть ξ_0 — произвольный элемент множества Ξ. Положим $\Xi_0 = \Xi \setminus \{\xi_0\}$,

$E^{\xi_0} = \bigcup_{\xi \in \Xi_0} E_\xi$. По индуктивному предположению (число элементов множества Ξ_0 равно $n-1$), $\mu^* E^{\xi_0} = \sum_{\xi \in \Xi_0} \mu^* E_\xi$. Но так как, согласно теореме 3, система $\overline{\mathfrak{R}}$ является σ-кольцом и тем более кольцом, то $E^{\xi_0} \in \overline{\mathfrak{R}}$. Очевидно, кроме того, что $E = E_{\xi_0} \cup E^{\xi_0}$, причем множества E_{ξ_0} и E^{ξ_0} не пересекаются. Следовательно, пользуясь тем, что при $n=2$ предложение уже доказано, можем написать с учетом сказанного выше

$$\mu^* E = \mu^* E_{\xi_0} + \mu^* E^{\xi_0} = \mu^* E_{\xi_0} + \sum_{\xi \in \Xi_0} \mu^* E_\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \mu^* E_\xi.$$

Итак, сужение $\overline{\mu}$ функции μ^* на систему $\overline{\mathfrak{R}}$ — аддитивная функция множества. В то же время эта функция обладает свойством счетной полуаддитивности (теорема 1 (3.1)). Значит, по замечанию 4 (п. 2.3), функция $\overline{\mu}$ счетно-аддитивна, и равенство (12) справедливо и для счетного множества Ξ.

Теорема полностью доказана.

Резюмируем предыдущие рассмотрения. Обозначим через $\overline{\mu}$ сужение внешней меры μ^* на систему $\overline{\mathfrak{R}}$. Функция $\overline{\mu}$ определена, следовательно, на $\overline{\mathfrak{R}}$ равенством $\overline{\mu} E = \mu^* E$ $(E \in \overline{\mathfrak{R}})$. Так как $\overline{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$ (п 3.3), а μ^* является распространением меры μ (п. 3.2), то и $\overline{\mu}$ будет распространением меры μ.

Далее, $\overline{\mu}$ так же, как и μ^*, — неотрицательная функция, а ввиду теоремы 4 она счетно-аддитивна. Покажем, что верно следующее утверждение.

Предложение 1. $\overline{\mu}$ обладает свойством σ-конечности (гл. I, п. 2.4) и тем самым является мерой.

Доказательство. Пусть E — измеримое множество. Так как оно принадлежит системе $\mathfrak{R}^*$, то $E \subset S$, где S — σ-множество. Ввиду σ-конечности меры $\tilde{\mu}$ можно указать такое счетное семейство $\{S_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ σ-множеств, что $S \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi$, $\tilde{\mu} S_\xi < +\infty$. Мы получаем, что

$$E \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} S_\xi, \quad \tilde{\mu}(S_\xi) < +\infty \quad (\xi \in \Xi). \tag{15}$$

Кроме того, множества S_ξ $(\xi \in \Xi)$, будучи σ-множествами, измеримы, т. е. $S_\xi \in \overline{\mathfrak{R}}$ $(\xi \in \Xi)$; поскольку $\tilde{\mu} S_\xi = \overline{\mu} S_\xi < +\infty$ $(\xi \in \Xi)$, то (15) как раз и означает σ-конечность функции $\overline{\mu}$.

Итак, нами построена мера $\overline{\mu}$, заданная на σ-кольце $\overline{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$ и являющаяся распространением данной меры μ. Таким образом, поставленная в начале параграфа задача решена.

3.6. Исследуем свойства меры $\overline{\mu}$. Начнем с некоторых определений.

Определение 1. Неотрицательную аддитивную функцию множества (и, в частности, меру) λ, определенную на кольце $\mathfrak{R}$, называют *полной*, если, каковы бы ни были множества E, e, $E \in \mathfrak{R}$, $e \subset E$, из равенства $\lambda E = 0$ вытекает, что $e \in \mathfrak{R}$ (при этом, разумеется, $\lambda e = 0$).

Пусть λ_0 — мера, область определения которой — произвольная система $\mathfrak{C}$ подмножеств множества R^ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Определение 2. Полная мера $\overline{\lambda}$, заданная на σ-кольце $\overline{\mathfrak{R}}$

подмножеств множества R^ν, называется *лебеговским расширением данной меры* λ_0, если выполнены условия:

1) $\overline{\lambda} \supset \lambda_0$, т. е. $\overline{\mathfrak{K}} \supset \mathfrak{C}$ и $\overline{\lambda}E = \lambda_0 E$ для любого $E \in \mathfrak{C}$;

2) если λ — полная мера, заданная на σ-кольце $\mathfrak{K}$ подмножеств множества R^ν, являющаяся распространением меры λ_0, то $\lambda \supset \overline{\lambda}$, т. е. λ служит распространением также и функции $\overline{\lambda}$.

Иными словами, лебеговское расширение $\overline{\lambda}$ меры λ_0 можно охарактеризовать как такое распространение меры λ_0, которое является полной мерой, заданной на σ-кольце, и имеет наименьшую по сравнению со всеми остальными распространениями того же типа область определения.

Непосредственно из сказанного вытекает следующее предложение.

Предложение 1. Лебеговское расширение меры λ_0, если только оно существует, единственно.

Доказательство. Если $\tilde{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$ — лебеговские расширения меры λ_0, то, поскольку $\tilde{\lambda}$ — полная мера, заданная на σ-кольце, и $\tilde{\lambda} \supset \lambda_0$, должно быть $\tilde{\lambda} \supset \overline{\lambda}$ и, аналогично, $\overline{\lambda} \supset \tilde{\lambda}$, что, очевидно, возможно только в случае равенства $\overline{\lambda} = \tilde{\lambda}$.

Следствие. *Если область определения меры λ_0 — σ-кольцо, и λ_0 — полная мера, то ее лебеговское расширение $\overline{\lambda}$ — это сама λ_0.*

Когда область определения $\mathfrak{C}$ меры λ_0 — произвольная система, о существовании лебеговского расширения ничего сказать нельзя. Однако если λ_0 определена на кольце, то вопрос о существовании решается положительно.

Теорема 5 (3.1). *Пусть μ — мера, заданная на некотором кольце $\mathfrak{R}$ подмножеств множества R^ν. Тогда мера $\overline{\mu}$ — распространение меры μ, описанное в конце п. 3.5 — представляет собой лебеговское расширение меры μ.*

Доказательство. Мера $\overline{\mu}$ задана на системе $\overline{\mathfrak{R}}$, которая является σ-кольцом (теорема 3). Установим полноту $\overline{\mu}$.

Пусть множество $E \in \overline{\mathfrak{R}}$ и $\overline{\mu}E = 0$. Так как $\mu^* E = \overline{\mu}E = 0$, то это означает, что $E \in \mathfrak{N}$ (см. п. 3.3). Но система $\mathfrak{N}$ обладает свойством наследственности (3.3, предл. 1), так что если $e \subset E$, то $e \in \mathfrak{N}$, а, стало быть, $e \in \overline{\mathfrak{R}}$ (п. 3.3, предл. 2).

Пусть λ — полная мера, заданная на некотором σ-кольце $\mathfrak{K}$ подмножеств множества R^ν и являющаяся распространением данной меры μ. Требуется доказать, что $\lambda \supset \overline{\mu}$, т. е. что любое множество $E \in \overline{\mathfrak{R}}$ входит в систему $\mathfrak{K}$, причем $\lambda E = \overline{\mu}E$. Разобьем рассуждения на несколько этапов.

1) Если $E \in \mathfrak{R}$, то оба доказываемых утверждения вытекают из условий $\lambda \supset \mu$ и $\overline{\mu} \supset \mu$.

2) Предположим, что $E = S$, где S — σ-множество. Согласно определению этого понятия, можно найти такое счетное семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств из кольца $\mathfrak{R}$, что $S = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$. При этом можно считать, что множества A_ξ $(\xi \in \Xi)$ попарно не пересекаются (гл. I, п. 1.4). Поскольку $\mathfrak{K}$ — σ-кольцо, то $S \in \mathfrak{K}$. Ввиду счетной аддитивности обеих функций λ и $\overline{\mu}$ будет

$$\lambda S = \sum_{\xi \in \Xi} \lambda A_\xi, \quad \overline{\mu} S = \sum_{\xi \in \Xi} \overline{\mu} A_\xi,$$

а так как, согласно п. 1), $\lambda A_\xi = \overline{\mu} A_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, то $\lambda S = \overline{\mu} S$.

3) Пусть множество E таково, что существует убывающая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ σ-множеств, пересечением которой является множество E, причем $\overline{\mu}S_n < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Заметим, что в этом случае не надо заранее предполагать, что множество $E \in \overline{\mathfrak{R}}$. Поскольку $\overline{\mathfrak{R}}$ есть σ-кольцо, то пересечение любого счетного семейства, в частности последовательности множеств из $\overline{\mathfrak{R}}$, также входит в эту систему (гл. I, п. 1.6). Но $S_n \in \overline{\mathfrak{R}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Стало быть, и $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \overline{\mathfrak{R}}$. По этой же самой причине, учитывая доказанное в п. 2), можем заключить, что $E \in \mathfrak{K}$.

Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ в отношении меры $\overline{\mu}$ удовлетворяет всем условиям п. 2) теоремы 3(2.1). Поэтому $\overline{\mu}E = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\mu}S_n$. Но в силу п. 2) $\lambda S_n = \overline{\mu}S_n < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Значит, упомянутая теорема применима и к мере λ: $\lambda E = \lim\limits_{n \to \infty} \lambda S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\mu}S_n = \overline{\mu}E$.

4) Предположим теперь, что множество $E \in \mathfrak{N}$, т. е. что E — множество меры нуль. Согласно теореме 2, можно указать такую убывающую последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ σ-множеств и множество $e \in \mathfrak{N}$, что

$$E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) \setminus e, \quad \overline{\mu}S_n < +\infty \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Положим $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. Вследствие п. 3) множество D входит в обе системы $\overline{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{K}$, причем $\lambda D = \overline{\mu}D$. Но так как $D = E \cup e$ (см. теорему 2) и оба множества E и e имеют меру $(\overline{\mu})$ нуль, то таким же будет и множество D, т. е. $\overline{\mu}D = 0$, а значит, и $\lambda D = 0$. Поскольку, очевидно, $E \subset D$, в силу полноты меры λ получаем отсюда, что $E \in \mathfrak{K}$, причем $\lambda E = 0 = \overline{\mu}E$.

5) На этот раз будем понимать под E произвольное измеримое (т. е. входящее в $\overline{\mathfrak{R}}$) множество, для которого $\overline{\mu}E < +\infty$. Снова представляя E в виде (16) и по-прежнему полагая $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, можем записать $E = D \setminus e$. Как установлено в пунктах 3) и 4), множества D и e принадлежат системе $\mathfrak{K}$. Следовательно, их разность — множество E — также принадлежит этому σ-кольцу. Поскольку $\lambda e = 0$, то $\lambda E = \lambda D$, точно так же $\overline{\mu}E = \overline{\mu}D$, а в силу п. 3) $\lambda D = \overline{\mu}D$, так что и $\lambda E = \overline{\mu}E$.

6) Пусть, наконец, E — произвольное измеримое множество. Ввиду σ-конечности меры $\overline{\mu}$ (см. гл. I, п. 2.4) существует такая п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых множеств, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n; \quad \overline{\mu}E_n < +\infty \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

При этом можно считать, что множества E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ попарно не пересекаются $\left(\text{иначе мы заменим } E_n \text{ на } E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \ (n = 1, 2, \ldots), \text{ соотношения (17) от этого не нарушаются}\right)$. Поскольку, по доказанному в п. 5), $E_n \in \mathfrak{K}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{K}$ (ведь $\mathfrak{K}$ — σ-кольцо!). Вследствие счетной аддитивности функций λ и $\bar{\mu}$ будет, кроме того, $\lambda E = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda E_n$, $\bar{\mu} E = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n$, а по предыдущему — $\lambda E_n = \bar{\mu} E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так что и $\lambda E = \bar{\mu} E$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. При доказательстве того факта, что произвольное лебеговское расширение λ меры μ есть распространение меры $\bar{\mu}$, условие σ-конечности меры λ не было использовано. Не в полной мере было использовано также и предположение, что система $\mathfrak{K}$ является σ-кольцом. Все рассуждения теоремы проходят, если потребовать, чтобы $\mathfrak{K}$ удовлетворяла следующим условиям:

1) если $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся множеств из системы $\mathfrak{K}$, то $\bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi \in \mathfrak{K}$;

2) если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность множеств из системы $\mathfrak{K}$, таких, что $\lambda E_n < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E \in \mathfrak{K}$ и существует $\lim_{n \to \infty} \lambda E_n = \lambda E$;

3) если множества E, $e \in \mathfrak{K}$, причем $e \subset E$; $\lambda E < +\infty$, $\lambda e = 0$, то $E \setminus e \in \mathfrak{K}$.*

Таким образом, имеет место следующий факт: пусть λ — неотрицательная счетно-аддитивная функция, обладающая свойством полноты; если область задания функции λ — система $\mathfrak{K}$ — удовлетворяет условиям 1) —3) и $\lambda \supset \mu$, т. е. если $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{R}$ и $\lambda A = \mu A$ $(A \in \mathfrak{R})$, то $\lambda \supset \bar{\mu}$, что означает $\mathfrak{K} \supset \overline{\mathfrak{R}}$ и $\lambda E = \bar{\mu} E$ $(E \in \overline{\mathfrak{R}})$.

Замечание 2. Как уже отмечалось, если $\mathfrak{R}$ не только кольцо, но и σ-кольцо, а данная мера μ — полная, то ее лебеговское расширение $\bar{\mu} = \mu$. В частности, $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}$. Множества, входящие в область определения полной меры μ, мы будем называть *измеримыми* (относительно меры μ).**

3.7. В теореме 5(3.I) мы предполагали, что исходная мера определена на кольце. Остановимся еще на одном случае, когда лебеговское расширение данной меры заведомо существует.

Рассмотрим систему $\mathfrak{P}_D^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν, заключенных в прямоугольнике D (подробнее см. гл. I, п. 1.1). Пусть μ_0 — мера, заданная на $\mathfrak{P}_D^\nu$. Согласно теореме 4(2.I), на кольце $\mathfrak{R}_D^\nu$, порожденном системой $\mathfrak{P}_D^\nu$ (теорема 1(1.I)), может быть единственным способом определена мера μ, являющаяся распространением функции μ_0. Обозначим через $\bar{\mu}$ лебеговское расширение меры μ. Тогда справедливо следующее.

Предложение 1. Мера $\bar{\mu}$ является лебеговским расширением меры μ_0.

---

* При этом вследствие субтрактивности (гл. I, п. 2.1) $\lambda(E \setminus e) = \lambda E$.

** Термин «измеримое множество» часто применяется так же как обозначение множества, входящего в данное σ-кольцо, независимо от того, задана ли на нем полная мера или нет.

Доказательство. Пусть λ — полная мера, заданная на σ-кольце $\mathfrak{K}$ и являющаяся распространением меры μ_0. Это означает, что $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{P}_D^\nu$ и $\lambda P = \mu_0 P \left(P \in \mathfrak{P}_D^\nu\right)$. Так как $\mathfrak{K}$ — σ-кольцо, а следовательно, и кольцо, содержащее систему $\mathfrak{P}_D^\nu$, то, согласно цитированной уже теореме 1(1.I), $\mathfrak{K}$ содержит также и кольцо $\mathfrak{R}_D^\nu$. Обозначим через $\tilde{\lambda}$ сужение функции λ на $\mathfrak{R}_D^\nu$. Поскольку λ — мера, т. е. во всяком случае функция аддитивная, такой же будет и функция $\tilde{\lambda}$.* Ясно, что $\tilde{\lambda} \supset \mu_0$, а тогда, основываясь на лемме из гл. I, п. 2.4, можно утверждать, что $\tilde{\tilde{\lambda}} = \mu$. Следовательно, $\lambda \supset \tilde{\tilde{\lambda}} = \mu$. Значит, по определению лебеговского расширения $\lambda \supset \bar{\mu}$, т. е. $\bar{\mu}$ служит лебеговским расширением меры μ_0.

В рассматриваемой ситуации сохраняет силу замечание 1 к теореме 5. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Предположение 2. Пусть λ — неотрицательная счетно-аддитивная функция, обладающая свойством полноты. Если область задания функции λ — система $\mathfrak{K}$ — удовлетворяет условиям 1) —3) замечания 1 к теореме 5, то соотношение $\lambda \supset \mu_0$ влечет соотношение $\lambda \supset \bar{\mu}$.

Доказательство. Чтобы воспользоваться результатом замечания 1 к теореме 5, достаточно установить, что $\lambda \supset \mu$. Но всякое множество $A \in \mathfrak{R}_D^\nu$ по теореме 1(1.I) можно представить в виде объединения конечного семейства $P_1, P_2, \ldots, P_n$ попарно не пересекающихся прямоугольников из системы $\mathfrak{P}_D^\nu : A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$. Ввиду того, что $P_k \in \mathfrak{P}_D^\nu \subset \mathfrak{K}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ условие 1) обеспечивает включение $A \in \mathfrak{K}$; при этом $\lambda A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda P_k = \sum\limits_{k=1}^{k} \mu_0 P_k = \mu A$.

Замечание. Все сказанное здесь распространяется на меры, заданные на произвольном полукольце $\mathfrak{P}$ подмножеств множества R^ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ (см. гл. I, п. 1.2).

3.8. В математическом анализе и многих его приложениях особо важную роль играет *мера Лебега*.

Определение 1. Пусть μ — мера, заданная на полукольце $\mathfrak{P}^\nu$ следующим образом:

$$\mu P = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_\nu - a_\nu), \text{ где } P = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu).$$

Мера μ_ν, являющаяся лебеговским расширением этой меры μ (см. п. 3.7), называется *мерой Лебега* (размерности ν), а множества, принадлежащие σ-алгебре, на которой задана мера μ_ν, называются *измеримыми по Лебегу*. Эту σ-алгебру мы будем обозначать символом $\mathfrak{M}^\nu$.

Если $P = [a, b) \times [c, d)$ — полуоткрытый прямоугольник в R^2, то его мера Лебега $\mu_2 P$ равна его площади $(b - a)(d - c)$

* Функция λ будет, разумеется, неотрицательной и счетно-аддитивной Как вытекает из дальнейшего, функция $\tilde{\lambda}$ также и σ-конечна и, таким образом, является мерой.

(для прямоугольников в R^3 мы соответственно получаем объем).*

Мера Лебега, естественно возникающая в связи с задачами измерения площадей и объемов, была исторически первым примером полной меры. С ее появлением теория меры и интеграла начала приобретать современную законченность и простоту.

С построением меры Лебега задачу измерения площадей и объемов практически можно считать решенной. В самом деле, все замкнутые и все открытые (и все борелевские) множества пространства R^ν являются элементами σ-алгебры $\mathfrak{M}^\nu$ (открытые множества измеримы по теореме 2 (1.I), а замкнутые множества измеримы потому, что они являются разностями открытого множества R^ν и своего дополнения). Открытыми и замкнутыми множествами и даже борелевскими множествами (см. п. 1.7) далеко не исчерпывается σ-алгебра $\mathfrak{M}^\nu$.

Можно доказать, что не все подмножества R^ν измеримы по Лебегу. Однако множества, не измеримые по Лебегу, встречаются редко; для того чтобы их построить, нужно прибегать к весьма специальным ухищрениям. Грубо говоря, верно следующее: практически все встречающиеся в анализе точечные множества (т. е. подмножества множества R^ν) измеримы по Лебегу.

Важный класс мер получается следующим образом.

Пусть D — непустой промежуток расширенной числовой прямой. Предположим, что g — функция, заданная на D, возрастающая и непрерывная слева. Обозначая через $\mathfrak{P}^1_D$ систему всех полуоткрытых промежутков, концы которых содержатся в D, и полагая

$$\mu_0 [\alpha, \beta) = g(\beta) - g(\alpha) \quad (\alpha, \beta \in D;\ \alpha \leqslant \beta),$$

получим в соответствии с теоремой 5(2.I) меру μ_0, заданную на $\mathfrak{P}^1_D$.

Определение 1. Лебеговское расширение только что построенной меры μ_0 называется *мерой Стилтьеса* (порожденной функцией g).

Следующее свойство меры Лебега называется *регулярностью.*

Теорема 6 (3.I). *Пусть μ_ν — мера Лебега размерности ν, и $E \in \mathfrak{M}^\nu$ (т. е. E — измеримое по Лебегу множество). Обозначим через $\mathfrak{G}_E$ систему всех открытых множеств простран-*

---

* Читатель легко убедится в том, что $\mu_\nu P = (b_1 - a_1) \ldots (b_\nu - a_\nu)$, если P — замкнутый (соответственно открытый) прямоугольник $[a_1\ b_1] \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu]$ $((a_1, b_1) \times \ldots \times (a_\nu, b_\nu))$.

ства R^ν, содержащих E, а через $\mathfrak{F}_E$ — систему всех замкнутых ограниченных множеств, содержащихся в E. Тогда

$$\mu_\nu E = \inf_{G \in \mathfrak{G}_E} \mu_\nu G = \sup_{F \in \mathfrak{F}_E} \mu_\nu F. \tag{18}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что системы $\mathfrak{G}_E$ и $\mathfrak{F}_E$ не пусты. Первая включает, например, множество R^ν, вторая — пустое множество. Далее, любое открытое множество является σ-множеством (гл. I, п. 1.5) и, следовательно, измеримо. Тем самым и замкнутые множества, будучи дополнениями открытых, измеримы. Таким образом, все части равенства (18) имеют смысл.

Докажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое множество $G \in \mathfrak{G}_E$, т. е. открытое множество, содержащее E, что $\mu_\nu (G \setminus E) \leqslant \varepsilon$.

Так как E измеримо, то найдется σ-множество $S \supset E$ и обладающее тем свойством, что $\mu_\nu (S \setminus E) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (см. п. 3.3). Но в данной ситуации каждое σ-множество допускает представление в виде объединения последовательности $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ полуоткрытых прямоугольников размерности ν (см. гл. I, п. 1.5).

Вспомним лемму п. 2.5. В соответствии с этой леммой

$$\mu_\nu P_n = \inf_{\substack{\mathring{Q} \supset P_n \\ Q \in \mathfrak{P}^\nu}} \mu_\nu Q.$$

Значит для каждого n ($n = 1, 2, \ldots$) можно подобрать прямоугольник $Q_n \in \mathfrak{P}^\nu$ так, что

$$\mathring{Q}_n \supset P_n \text{ и } \mu_\nu Q_n - \mu_\nu P_n < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{19}$$

Обозначим объединение $\bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathring{Q}_n$ символом G. Тогда

$$S = \bigcup_{n=1}^\infty P_n \subset G = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{Q}_n \subset Q = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n.$$

Поскольку, как легко проверить,

$$G \setminus S \subset Q \setminus S \subset \bigcup_{n=1}^\infty (Q_n \setminus P_n),$$

то вследствие (19) имеем

$$\mu_\nu (G \setminus S) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu_\nu (Q_n \setminus P_n) = \sum_{n=1}^\infty (\mu_\nu Q_n - \mu_\nu P_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Стало быть, $\mu_\nu (G \setminus E) = \mu_\nu [(G \setminus S) \cup (S \setminus E)] = \mu_\nu (G \setminus S) + \mu_\nu (S \setminus E) \leqslant \varepsilon$.

Остается заметить, что G, будучи объединением последовательности открытых множеств, открыто и, очевидно, содержит E.

Из доказанного сразу же вытекает первое из равенств (18). Действительно, поскольку для любого $G \in \mathfrak{G}_E$ будет $\mu_\nu G \geqslant \mu_\nu E$, то и $\inf\limits_{G \in \mathfrak{G}_E} \mu_\nu G \geqslant \mu_\nu E$.

С другой стороны, каково бы ни было $G_0 \in \mathfrak{G}_E$, имеем

$$\inf_{G \in \mathfrak{G}_E} \mu_\nu G \leqslant \mu_\nu G_0 = \mu_\nu [E \cup (G_0 \setminus E)] = \mu_\nu E + \mu_\nu (G_0 \setminus E),$$

причем, по доказанному, для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое множество $G_0 \in \mathfrak{G}_E$, что $\mu_\nu (G_0 \setminus E) < \varepsilon$, откуда и получаем неравенство $\inf\limits_{G \in \mathfrak{G}_E} \mu_\nu G \leqslant \mu_\nu E$.

Проверим теперь справедливость следующего утверждения: для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать замкнутое множество $F_0 \subset E$, такое, что $\mu_\nu (E \setminus F_0) \leqslant \varepsilon$.

В самом деле, обозначим через E' дополнение множества E, т. е. $E' = R^\nu \setminus E$. Множество E' измеримо. Следовательно, можно подобрать открытое множество $G \supset E'$ так, чтобы было $\mu_\nu (G \setminus E') \leqslant \varepsilon$. Примем за F_0 дополнение множества G. Множество F_0 замкнуто и, понятно, содержится в данном множестве E. Но $G \setminus E' = E \setminus F_0$, следовательно, $\mu_\nu (E \setminus F_0) \leqslant \varepsilon$.

Положим

$$T_n = \underbrace{[-n, n] \times [-n, n] \times \ldots \times [-n, n]}_{\nu \text{ раз}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

T_n — замкнутое ограниченное множество при любом $n = 1, 2, \ldots$, поэтому и пересечение $F_n = F_0 \cap T_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где F_0 — найденное выше множество, замкнуто. Кроме того, последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = F_0$. По замечанию 4 к теореме 3 (2.I) $\mu_\nu F_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \mu_\nu F_n$. Заметим теперь, что $F_n \in \mathfrak{F}_E$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно,

$$\sup_{F \in \mathfrak{F}_E} \mu_\nu F \geqslant \lim_{n \to \infty} \mu_\nu F_n = \mu_\nu F_0. \tag{20}$$

Но если $\mu_\nu E = +\infty$, то и $\mu_\nu F_0 = +\infty$. (Действительно, из неравенства $\mu_\nu F_0 < +\infty$ следовало бы, что $\mu_\nu (E \setminus F_0) = \mu_\nu E - \mu_\nu F_0 \leqslant \varepsilon$, что нелепо), так что в этом случае $\sup\limits_{F \in \mathfrak{F}_E} \mu_\nu F = +\infty = \mu_\nu E$, и второе из равенств (18) доказано. В случае же, когда $\mu_\nu E < +\infty$, будет $\mu_\nu E = \mu_\nu F_0 + \mu_\nu (E \setminus F_0) \leqslant \mu_\nu F_0 + \varepsilon$, и мы получаем из (20) $\sup\limits_{F \in \mathfrak{F}_E} \mu_\nu F \geqslant \mu_\nu E - \varepsilon$, что ввиду произвольности ε приводит к неравенству $\sup\limits_{F \in \mathfrak{F}_E} \mu_\nu F \geqslant \mu_\nu E$. Противоположное неравенство вытекает из того, что при любом $F \in \mathfrak{F}_E$ будет $\mu_\nu F \leqslant \mu_\nu E$.

Замечание. Пусть μ_0 — конечная мера, заданная на системе $\mathfrak{P}^\nu$; $\bar{\mu}$ означает ее лебеговское расширение. Результат теоремы справедлив и по отношению к мере $\bar{\mu}$.

Действительно, доказательство теоремы применительно к этому общему случаю не встретит затруднений, если только мы убедимся в справедливости соотношений (19). Для того чтобы оправдать эти соотношения, достаточно, однако, заметить, что если $H = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2) \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu)$ $(\alpha_i \leqslant \beta_i;$ $i = 1, 2, \ldots, \nu)$ — какой-либо прямоугольник, то прямоугольники

$$H_k = \left[\alpha_1 - \frac{1}{k}, \beta_1\right) \times \left[\alpha_2 - \frac{1}{k}, \beta_2\right) \times \ldots \times \left[\alpha_\nu - \frac{1}{k}, \beta_\nu\right) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

образуют убывающую последовательность, причем $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_k$; так как, по условию, $\bar{\mu} H_k = \mu_0 H_k < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то применима теорема 3 (2.I), которая дает $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{\mu} H_k = \bar{\mu} H$; стало быть, как бы мало ни было число $\delta > 0$, для достаточно больших k будет $\bar{\mu} H_k \leqslant \bar{\mu} H + \delta$, что и открывает возможность выбрать прямоугольники Q_n так, чтобы удовлетворялось (19).

Следствие 1. *Пусть E — подмножество множества R^ν, измеримое по Лебегу. Тогда*

1) *существует такая последовательность $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ ограниченных замкнутых множеств пространства R^ν и такое множество e' $(e' \subset R^\nu)$ меры нуль: $\mu_\nu e' = 0$, что $E = \left(\bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n\right) \cup e'$ и $F_n \subset F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;*

2) *существует такая последовательность $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ открытых множеств пространства R^ν и множество e'' $(e'' \subset R^\nu)$ меры нуль: $\mu_\nu e'' = 0$, что $E = \left(\bigcap\limits_{n=1}^\infty G_n\right) \setminus e''$ и $G_n \supset G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Если $\mu_\nu E < +\infty$, то можно считать, что $\mu_\nu G_n < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Допустим сначала, что E — ограниченное множество. По теореме, при всяком натуральном n можно найти замкнутое ограниченное множество $\widetilde{F}_n$, такое, что $\widetilde{F}_n \subset E$ и $\mu_\nu(E \setminus \widetilde{F}_n) < \frac{1}{n}$. Обозначим через F_n объединение $\widetilde{F}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{F}_n$. Множество F_n замкнуто (д. 3, п. 4) и, очевидно, ограничено. Кроме того, ясно, что $F_n \subset F_{n+1}$ при всяком натуральном n. Положим $e' = E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n$ и проверим, что $\mu_\nu e' = 0$. Действительно,

$$e' \subset E \setminus \bigcup_{n=1}^m F_n = E \setminus F_m \subset E \setminus \widetilde{F}_m,$$

и потому

$$\mu_\nu e' \leqslant \mu_\nu (E \setminus \widetilde{F}_m) < \frac{1}{m},$$

каково бы ни было натуральное число m; стало быть, $\mu_\nu e = 0$.

Теперь предположим, что E — неограниченное множество. Очевидно, $E = \bigcup\limits_{k=1}^\infty E_k$, где E_k — ограниченные измеримые множества. По доказанному

$$E_k = \left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n^{(k)}\right) \cup e_k,$$

где $F_n^{(k)}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ — замкнутые множества, а $\mu_\nu e_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Положим теперь $F_m = \bigcup\limits_{n,\, k \leqslant m} F_n^{(k)}$, $m = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что все множества F_m ограничены и замкнуты и $F_m \subset F_{m+1} \subset E$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Пусть, наконец, $e' = E \setminus \bigcup\limits_{m=1}^\infty F_m$. Так как

$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m \subset E$, то $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m \cup e'$. Нам остается проверить, что $\mu e' = 0$. Но

$$e' = \left(E \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_k \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) \subset$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_k \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^{(k)}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k,$$

и ввиду счетной полуаддитивности меры мы получаем

$$\mu e' \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu e_k = 0.$$

Утверждение 1) доказано полностью.

Докажем утверждение 2). Рассмотрим множество $R^{\nu} \setminus E$. Это множество также принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}^{\nu}$, т. е. измеримо по Лебегу. Стало быть, согласно утверждению 1), найдется последовательность замкнутых множеств $\{F'_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что

$$F'_n \subset F'_{n+1} \subset R^{\nu} \setminus E \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ и } \mu_{\nu}\left(\left(R^{\nu} \setminus E\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F'_n\right) = 0.$$

Пусть теперь

$$G_n = R^{\nu} \setminus F'_n \,(n = 1, 2, \ldots),\ e'' = \left(R^{\nu} \setminus E\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F'_n.$$

Легко видеть, что последовательность $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ и множество e'' — требуемые. Если $\mu_{\nu} E < +\infty$, то по теореме существует открытое множество G_0 такое, что $E \subset G_0$, $\mu_{\nu} G_0 < +\infty$. Последовательность $\{G_n \cap G_0\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из открытых множеств конечной меры, убывает, и, очевидно,

$$\mu_{\nu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap G_0) \setminus E\right) = 0.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть E — подмножество множества R^{ν}, измеримое по Лебегу. Тогда существуют такие множества A типа F_{σ} и B типа G_{δ}*, что $A \subset E \subset B \subset R^{\nu}$ и $\mu_{\nu}(E \setminus A) = \mu_{\nu}(B \setminus E) = 0$.*

Доказательство. Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности замкнутых и открытых множеств, о которых идет речь в предыдущем следствии. Множества A и B обладают всеми требуемыми свойствами.

* См. определение из гл. I, п. 1.7.

§ 4. Инвариантность меры Лебега относительно движений

Цель этого параграфа — доказательство инвариантности меры Лебега относительно движений (переносов и поворотов) пространства R^ν. Мы установим, что если E — измеримое по Лебегу подмножество множества R^ν, а множество $\widetilde{E}$ получено из множества E движением, то множество $\widetilde{E}$ измеримо, и $\mu_\nu \widetilde{E} = \mu_\nu E$.

Именно это свойство меры Лебега отличает ее от прочих мер и делает ее особенно важной. Можно доказать, что мера μ, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{B}^\nu$ борелевских подмножеств пространства R^ν, инвариантная относительно движений, лишь множителем отличается от μ_ν (точнее, от сужения функции μ_ν на σ-алгебру всех борелевских подмножеств пространства R^ν).

Инвариантность меры Лебега относительно движения мы выведем из общей теоремы о мере образа множества при линейном отображении.

В этом параграфе измеримыми мы будем называть множества, измеримые по Лебегу, а говоря «мера», мы всегда будем иметь в виду меру Лебега. Для понимания этого параграфа необходимо основательное знакомство с материалом добавления 3.

4.1. Лемма. *Пусть E_0 — измеримое подмножество пространства R^ν, Φ — непрерывное отображение множества E_0 в R^ν. Пусть $\mu_\nu \Phi[e] = 0$ (по поводу обозначения $\Phi[e]$ см. д. 1, п. 3) для любого множества e нулевой меры, содержащегося в E_0. Тогда образ $\Phi[E]$ любого измеримого множества E, содержащегося в множестве E_0, — снова измеримое множество.*

Доказательство. Если $E \in \mathfrak{M}^\nu$, $E \subset E_0$, то $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup e$, где $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность ограниченных замкнутых множеств, а $\mu_\nu e = 0$ (см. следствие теоремы 6(3.I)). Легко видеть, что $\Phi[E] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi[F_k] \cup \Phi[e]$. Все множества $\Phi[F_k]$ измеримы, будучи замкнутыми и ограниченными (ведь отображение Φ непрерывно!) (д. 3, п. 5), множество $\Phi[e]$, будучи множеством нулевой меры, также измеримо. Значит, $\Phi[E] \in \mathfrak{M}^\nu$.

Лемма доказана.

4.2. Теорема 1 (4.I). *Пусть G — открытое подмножество пространства R^ν, Φ — гладкое отображение множества G в пространство R^ν. Если $E \subset G$, $E \in \mathfrak{M}^\nu$, то и $\Phi[E] \in \mathfrak{M}^\nu$.*

Иначе говоря, образ измеримого множества при гладком отображении — снова измеримое множество.

Доказательство. Проверим, что если $e \subset G$ и $\mu_\nu e = 0$, то и $\mu_\nu \Phi[e] = 0$. Так как гладкое отображение непрерывно, то (в силу леммы) отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Пусть сначала $e \subset \Delta$, где Δ — полуоткрытый прямоугольник (размерности ν), строго содержащийся в G (см. п. 1.5). Пусть ε — положительное число.

Рассмотрим ограниченное открытое множество Δ', содержащее $\bar{\Delta}$ и строго содержащееся в G (т. е. $\bar{\Delta}' \subset G$) (см. д. 3, п. 5).

По теореме 6 (3.I) существует открытое множество g пространства R^ν, такое, что $e \subset g$, $\mu_\nu g \leqslant \varepsilon$. Можно считать, что $g \subset \Delta'$, так как в противном случае мы рассмотрели бы пересечение $g \cap \Delta'$. По теореме 2 (1.I) найдется счетное семейство $\{Q_\eta\}$ $(\eta \in H)$ попарно не пересекающихся квадратов, строго содержащихся в g и таких, что $g = \bigcup_{\eta \in H} Q_\eta$. Предположим, что

$$Q_\eta = \left[x_1^{(\eta)} - \delta^{(\eta)},\ x_1^{(\eta)} + \delta^{(\eta)}\right) \times \ldots \times \left[x_\nu^{(\eta)} - \delta^{(\eta)},\ x_\nu^{(\eta)} + \delta^{(\eta)}\right).$$

Тогда $\sum_{\eta \in H} \mu Q_\eta = \mu g$, т. е.

$$\sum_{\eta \in H} \left[2\delta^{(\eta)}\right]^\nu \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ — координатные функции отображения Φ (д. 3, п. 1). Пусть j — один из номеров $1, \ldots, \nu$. К функции φ_j применим предложение 7 об оценке приращения из д. 3, п. 7. Полагая $x_\eta = (x_1^{(\eta)}, \ldots, x_\nu^{(\eta)})$, видим, что для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in Q_\eta$ найдется такая точка $\bar{x}_\eta \in Q_\eta$, что

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_\eta)| \leqslant |\langle \operatorname{grad} \varphi_j(\bar{x}_\eta),\ (x - x_\eta)\rangle_\nu|.$$

Применим неравенство Коши — Буняковского:

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_\eta)| \leqslant \|\operatorname{grad} \varphi_j(\bar{x}_\eta)\|_\nu \, \|x - x_\eta\|_\nu. \tag{2}$$

Теперь воспользуемся гладкостью отображения Φ. Все функции $\|\operatorname{grad} \varphi_j\|_\nu$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ непрерывны в G, и, стало быть, по теореме Вейерштрасса, ограничены на замкнутом ограниченном множестве $\bar{\Delta}'$ (ведь $\bar{\Delta}' \subset G$!). Пусть M — число, большее всех чисел

$$\alpha_j = \sup_{z \in \Delta'} \|\operatorname{grad} \varphi_j(z)\|_\nu \quad (j = 1, \ldots, \nu).$$

Из неравенства (2) следует, что

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_\eta)| < M \|x - x_\eta\| \quad (x \in Q_\eta,\ x \neq x_\eta). \tag{3}$$

Но ведь если $x \in Q_\eta$, то $|x_s - x_s^{(\eta)}| \leqslant \delta^{(\eta)}$ при всех s ($s = 1, 2, \ldots, \nu$). Поэтому

$$\|x - x_\eta\|_\nu = \sqrt{\sum_{s=1}^{\nu} (x_s - x_s^{(\eta)})^2} \leqslant \sqrt{\nu (\delta^{(\eta)})^2} = \delta^{(\eta)} \sqrt{\nu}. \quad (4)$$

Сопоставляя неравенства (3) и (4), получаем

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_\eta)| < M \sqrt{\nu}\,\delta^{(\eta)} \quad (x \in Q_\eta;\ j = 1, 2, \ldots, \nu;\ \eta \in H). \quad (5)$$

Неравенство (5) означает, что при $x \in Q_\eta$ точка $\Phi(x)$ содержится в открытом квадрате, центром которого служит точка $\Phi(x_\eta)$, а длина стороны равна $2M \sqrt{\nu}\,\delta^{(\eta)}$.

Через D_η обозначим соответствующий полуоткрытый квадрат. Тогда оказывается, что множество $\Phi[e]$ содержится в объединении такого счетного семейства полуоткрытых квадратов $\{D_\eta\}$ ($\eta \in H$), что

$$\sum_{\eta \in H} \mu D_\eta = \sum_{\eta \in H} (M \sqrt{\nu})^\nu (2\delta^{(\eta)})^\nu = (M \sqrt{\nu})^\nu \sum_{\eta \in H} (2\delta^{(\eta)})^\nu \leqslant (M \sqrt{\nu})^\nu \varepsilon$$

(мы воспользовались неравенством (1)). Пользуясь произволом в выборе числа ε и вспоминая предложение 3, п. 3.3, видим, что $\mu_\nu \Phi[e] = 0$.

Пусть теперь e — любое множество меры нуль, содержащееся в G. Пусть $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, где P_k — полуоткрытый квадрат, строго содержащийся в G. Тогда $e = \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap e)$ и $\Phi[e] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi[P_k \cap e]$. Все множества $\Phi[P_k \cap e]$, по доказанному, имеют меру нуль. Следовательно, и $\mu_\nu \Phi[e] = 0$ (см. п. 3.3).

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Мы доказали, что при гладком отображении Φ образ всякого множества e меры нуль — снова множество меры нуль: $\mu_\nu \Phi[e] = 0$ всякий раз, когда $e \subset G$ и $\mu_\nu e = 0$.

Следствие. *Кусочно-гладкая кривая (см. определение 8, д. 3, п. 3) в пространстве R^ν есть множество меры нуль (относительно лебеговой меры μ_ν).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma \subset R^\nu$ — кусочно-гладкая кривая. Это значит, что $\gamma = \varphi[[a, b]]$, где φ — кусочно-гладкий путь в R^ν, заданный на промежутке $[a, b]$. Это означает в свою очередь, что найдется конечное семейство $\{t_l\}$ ($l \in \mathrm{N}_s$) точек промежутка $[a, b]$, обладающее следующими свойствами: $t_1 = a$, $t_s = b$, $t_l < t_{l+1}$ ($l \in \mathrm{N}_{s-1}$), путь $\varphi|_{[t_l, t_{l+1}]}$ — гладкий ($l \in \mathrm{N}_{s-1}$). Очевидно, достаточно проверить, что $\mu_\nu \varphi[[t_l, t_{l+1}]] = 0$ ($l \in \mathrm{N}_{s-1}$).

Поэтому можно считать, что координатные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ отображения φ дифференцируемы в каждой точке промежутка $[a, b]$ и производные $\varphi_1', \ldots, \varphi_\nu'$ непрерывны на $[a, b]$.

Продолжим отображение φ с промежутка $[a, b]$ на всю прямую R. Для этого рассмотрим отображение $\tilde{\varphi}$ прямой R в пространство R^ν с координатными функциями $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_\nu$, такими, что

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \varphi_j(t) \qquad (t \in [a, b],\ j \in \mathbf{N}_\nu),$$

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \varphi_j(a) + \varphi_j'(a)(t-a) \qquad (t \in (-\infty, a),\ j \in \mathbf{N}_\nu),$$

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \varphi_j(b) + \varphi_j'(b)(t-b) \qquad (t \in (b, +\infty),\ j \in \mathbf{N}_\nu).$$

Легко видеть, что отображение $\tilde{\varphi}$ — гладкое.

Теперь рассмотрим отображение Φ пространства R^ν в себя, заданное следующим образом:

$$\Phi((x_1, \ldots, x_\nu)) = \tilde{\varphi}(x_1) \quad ((x_1, \ldots, x_\nu) \in R^\nu).$$

Ясно, что Φ — гладкое отображение и $\gamma = \Phi[E]$, где

$$E = \{(x_1, \ldots, x_\nu) \in R^\nu : a \leqslant x_1 \leqslant b,\ x_2 = x_3 = \ldots = x_\nu = 0\}.$$

Проверим, что $\mu_\nu E = 0$. Для этого заметим, что

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[a, b+\frac{1}{n}\right) \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{\nu \text{ раз}},$$

так что $\mu_\nu E = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{\nu-1} \left(b + \frac{1}{n} - a\right) = 0$. Остается сослаться на замечание.

Следствие доказано.

Определение 1. Пусть Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^λ $(\lambda < \nu)$ в пространство R^ν. Множество $\Phi[G]$ называется *λ-мерной гладкой поверхностью в пространстве R^ν*.

Предлагаем читателю доказать, что ν-мерная мера любой λ-мерной $(\lambda < \nu)$ гладкой поверхности в пространстве R^ν равна нулю.

4.3. Следующий факт будет нам полезен при доказательстве основной теоремы этого параграфа (см. ниже, теорема 2).

Лемма. *Пусть Φ — взаимно однозначное отображение множества R^ν в себя, такое, что образ всякого измеримого множества — снова измеримое множество, и образ всякого* *множества меры нуль — снова множество меры нуль. Пусть существует такое число (конечное) c, что $\mu_\nu \Phi[P] = c\mu_\nu P$, каков бы ни был полуоткрытый квадрат P.** * *Тогда $\mu_\nu \Phi[E] = c\mu_\nu E$, каково бы ни было множество $E \in \mathfrak{M}^\nu$.*

Доказательство. Приступая к доказательству, предположим сначала, что G — открытое множество. Тогда $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, где P_k — попарно не пересекающиеся полуоткрытые квадраты, $\Phi[G] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi[P_k]$, причем $\Phi[P_{k'}] \cap \Phi[P_{k''}] = \Lambda$, если $k' \neq k''$. Значит,

$$\mu_\nu \Phi[G] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\nu \Phi[P_k] = \sum_{k=1}^{\infty} c\mu_\nu P_k = c \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\nu P_k = c\mu_\nu G.$$

Пусть, далее, $E \in \mathfrak{M}^\nu$, $\mu_\nu E < +\infty$. Тогда $E = \bigcap_{s=1}^{\infty} G_s \setminus e_0$, где $\{G_s\}_{s=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность открытых множеств конечной меры, а $\mu_\nu e_0 = 0$ (следствие 1 теоремы 6(3.I)). Ясно, что $\mu_\nu \Phi[G_1] = c\mu_\nu G_1 < +\infty$, и потому

$$\mu_\nu \Phi[E] = \mu_\nu \Phi\left[\bigcap_{s=1}^{\infty} G_s\right] - \mu_\nu \Phi[e_0] = \lim_{s \to \infty} \mu_\nu \Phi[G_s] =$$
$$= c \lim_{s \to \infty} \mu_\nu G_s = c\mu_\nu E.^{**}$$

Наконец, если $E \in \mathfrak{M}^\nu$, $\mu_\nu E = +\infty$, то $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где все $E_k \in \mathfrak{M}^\nu$, $\mu_\nu E_k < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $E_{k'} \cap E_{k''} = \Lambda$ при $k' \neq k''$. Остальное ясно.

Лемма доказана.

Пусть, в частности, Φ — сдвиг на вектор x_0: $\Phi(x) = x + x_0$, $x \in R^\nu$. Это отображение, очевидно, гладкое, и образ квадрата — снова квадрат той же меры, так что $c = 1$. Значит, при сдвиге измеримого множества мы получаем измеримое множество той же меры.

4.4. Теорема 2(4.I). *Пусть A — взаимно однозначное линейное отображение множества R^ν на себя* (*д.* 3, *п.* 6). *Если $E \in \mathfrak{M}^\nu$, то $A[E] \in \mathfrak{M}^\nu$ и $\mu_\nu A[E] = |\det A| \mu_\nu E$* (*д.* 3, *п.* 6).

Доказательство. Отображение A, очевидно, гладкое, и потому в силу теоремы 1 образ любого измеримого множе-

---

* Легко понять, что условия этой леммы не независимы. Однако в приложениях удобна именно такая формулировка.

** Равенства $\Phi[E] = \Phi\left[\bigcap_{s=1}^{\infty} G_s\right] \setminus \Phi[e_0]$ и $\Phi\left[\bigcap_{s=1}^{\infty} G_s\right] = \bigcap_{s=1}^{\infty} \Phi[G_s]$ верны ввиду взаимнооднозначности отображения.

ства при отображении A — снова измеримое множество, и $\mu_\nu A[e]=0$, если $\mu_\nu e=0$.

1. Пусть сначала A — „диагональное“ отображение с положительными собственными числами:

$$A(x)=(\lambda_1 x_1,\ \lambda_2 x_2,\ \ldots,\ \lambda_\nu x_\nu) \quad (x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu)).$$

Образ квадрата $P=[a,\ b)\times\ldots\times[a,\ b)$ есть прямоугольник $[\lambda_1 a,\ \lambda_1 b)\times\ldots\times[\lambda_\nu a,\ \lambda_\nu b)$, и потому

$$\mu_\nu A[P]=\lambda_1\lambda_2\ \ldots\ \lambda_\nu\,(\mu_\nu P)=|\det A|\,\mu_\nu P,$$

каков бы ни был полуоткрытый квадрат P. Применив лемму предыдущего пункта ($c=\lambda_1\lambda_2\ \ldots\ \lambda_\nu$), видим, что для „диагональных“ отображений с положительными собственными числами теорема верна. В частности, она верна для любого отображения подобия (гомотетии), т. е. отображения, задаваемого равенством

$$A(x)=\lambda x \quad (x\in R^\nu,\ \lambda\in R,\ \lambda>0).$$

2. Пусть U — ортогональное отображение. Проверим, что $\mu_\nu U[P]=\mu_\nu P$, каков бы ни был полуоткрытый квадрат P. Тогда ссылка на лемму предыдущего пункта завершит доказательство теоремы и в этом случае, так как $|\det U|=1$.

Пусть P_0 — какой-нибудь непустой полуоткрытый квадрат. Его образ $U[P_0]$ — измеримое множество (см. начало доказательства). Кроме того, $U[P_0]$ — ограниченное множество, ибо U — непрерывное отображение. Значит, $\mu_\nu U[P_0]=s\mu_\nu P_0$ при некотором $s\in[0,\ +\infty)$.

Предположим, что

$$P=[x_1-h,\ x_1+h)\times\ldots\times[x_\nu-h,\ x_\nu+h),$$
$$P_0=[x_1^{(0)}-h^{(0)},\ x_1^{(0)}+h^{(0)})\times\ldots\times[x_\nu^{(0)}-h^{(0)},\ x_\nu^{(0)}+h^{(0)}),$$
$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu),\ x_0=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_\nu^{(0)}).$$

Образ $A[P_0]$ квадрата P_0 при гомотетии A (с центром в начале) с коэффициентом $\lambda=\frac{h}{h_0}$ есть, очевидно, квадрат с центром λx_0 и стороной $2h$. Образ квадрата $A[P_0]$ при сдвиге B на вектор $x-\lambda x_0$ есть квадрат с центром в точке x со стороной $2h$, т. е. квадрат P. Итак,

$$B[A[P_0]]=P. \tag{6}$$

Отметим теперь, что, во-первых, A — диагональное отображение с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$, а, во-вторых,

$$A\circ U=U\circ A=\lambda U. \tag{7}$$

Кроме того, образ любого подмножества X множества R^ν при отображении $U \circ B$ совпадает с результатом сдвига множества $U[X]$ на вектор $U[x - \lambda x_0]$, и потому

$$\mu_\nu U[B[X]] = \mu_\nu U[X],$$

если $X \in \mathfrak{M}^\nu$ (см. п. 4.3).

Итак, учитывая (6), (7) и результат, полученный в разделе 1 доказательства, получаем

$$\mu_\nu U[P] = \mu_\nu U[B[A[P_0]]] = \mu_\nu U[A[P_0]] = \mu_\nu \lambda U[P_0] =$$
$$= \lambda^\nu \mu_\nu U[P_0] = \lambda^\nu s \mu_\nu P_0 = s\mu_\nu A[P_0] = s\mu_\nu B[A[P_0]] = s\mu_\nu P.$$

Итак,

$$\mu_\nu U[P] = s\mu_\nu P,$$

каков бы ни был полуоткрытый квадрат P. Значит, по лемме (п. 4.3),

$$\mu_\nu U[E] = s\mu_\nu E \tag{8}$$

для любого множества E ($E \in \mathfrak{M}^\nu$). В частности,

$$\mu_\nu U[D^\nu(1)] = s\mu_\nu(D^\nu(1)), \tag{9}$$

где $D^\nu(1)$ — открытый единичный шар пространства R^ν:

$$D^\nu(1) = \{x \in R^\nu : \|x\|_\nu < 1\}.$$

С другой стороны, U отображает шар $D^\nu(1)$ на себя, так что

$$U[D^\nu(1)] = D^\nu(1).$$

Сопоставляя это равенство с равенством (9) и замечая, что, разумеется, $\mu_\nu D^\nu(1) > 0$, мы приходим к такому выводу:

$$s = 1.$$

Но теперь равенство (8) превращается в утверждение теоремы (для ортогонального отображения U):

$$\mu_\nu U[E] = |\det U|\, \mu_\nu E \quad (E \in \mathfrak{M}^\nu),$$

так как $|\det U| = 1$ (д. 3, п. 6).

3. Пусть теперь A — любое линейное взаимно однозначное отображение множества R^ν на себя. Применив предложение 10 из д. 3, п. 6, получим

$$A = U_1 \circ D \circ U_2,$$

где U_1, U_2 — ортогональные отображения, а D — диагональное отображение с положительными собственными числами. Пусть P — любой полуоткрытый квадрат. Тогда

$$\mu_\nu A[P] = \mu_\nu (U_1 \circ D \circ U_2)[P] = \mu_\nu U_1[(D \circ U_2)[P]] = \mu_\nu (D \circ U_2)[P].$$

Последнее равенство мы получаем на основании п. 2. Применяя результат первого пункта доказательства, видим, что

$$\mu_\nu (D \circ U_2)[P] = \det D \cdot \mu_\nu U_2 [P],$$

и, еще раз возвращаясь ко второму пункту, что $\mu_\nu U_2 [P] = \mu_\nu P$. Итак, $\mu_\nu A [P] = \det D \cdot \mu_\nu P$. Но $\det A = \det U_1 \cdot \det D \cdot \det U_2$, так что $|\det A| = |\det U_1| \cdot |\det D| \cdot |\det U_2| = |\det D| = \det D$. Поэтому $\mu_\nu A [P] = |\det A| \mu_\nu P$, каков бы ни был полуоткрытый квадрат P. Ссылка на лемму (п. 4.3) завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть* Φ *— движение в пространстве* R^ν, *т. е. отображение пространства* R^ν *на себя вида*

$$\Phi = U \circ B,$$

где B *— сдвиг, а* U *— ортогональное отображение.*

Если $E \in \mathfrak{M}^\nu$, *то и* $\Phi[E] \in \mathfrak{M}^\nu$, *и* $\mu_\nu \Phi [E] = \mu_\nu E$.

Доказательство. Согласно теореме 1, множество $B[E]$ измеримо и $\mu_\nu B [E] = \mu_\nu E$. По той же теореме, множество $U[B[E]]$ тоже измеримо, и $\mu_\nu U [B[E]] = \mu_\nu B [E]$, т. е. $\mu_\nu \Phi [E] = \mu_\nu E$.

Следствие доказано.

Итак, нами доказана инвариантность меры Лебега относительно движений, о которой шла речь в начале параграфа.

Следствие 2. *Пусть* Φ *— аффинное отображение пространства* R^ν *в себя* (*д.* 3, *п.* 6). *Если* $E \in \mathfrak{M}^\nu$, *то и* $\Phi[E] \in \mathfrak{M}^\nu$, *и*

$$\mu_\nu \Phi [E] = |\det \Phi| \mu_\nu E.$$

Доказательство. Отображение Φ равно $B \circ A$, где A — линейное отображение, а B — сдвиг. Остальное ясно (ср. с доказательством следствия 1). Напомним, что, по определению, $\det \Phi = \det A$.

Глава II

ИНТЕГРАЛ

*На протяжении всей этой главы буква $\mathfrak{M}$ будет обозначать некоторое σ-кольцо подмножеств пространства R^ν.**

Элементы σ-кольца $\mathfrak{M}$ мы будем называть измеримыми множествами. Буквой μ мы будем обозначать меру, заданную на σ-кольце $\mathfrak{M}$; эта мера всегда будет предполагаться полной.

Всюду в этой главе словом „функция“, за исключением особо оговоренных случаев, мы будем обозначать отображение в множество $\overline{R}$ — расширенную вещественную прямую.

Напомним еще, что символ $\mathfrak{M}^\nu$ обозначает σ-алгебру всех подмножеств пространства R^ν, измеримых по Лебегу, а μ_ν — меру Лебега размерности ν.

Что же такое интеграл? Ответу на этот вопрос посвящена, по сути дела, вся книга. Естественно поэтому, что более или менее полное представление об интеграле можно получить, лишь дочитав книгу до последней страницы или, по крайней мере, ознакомившись во всех деталях с настоящей главой. Тем не менее мы попытаемся здесь, по необходимости очень приблизительно, описать идею, лежащую в основе понятия интеграла.

Пусть L — множество, состоящее из функций, заданных на измеримых множествах. Мы будем предполагать, что L содержит все постоянные функции, заданные на множествах конечной меры, и что вместе со всякой функцией $f \in L$ множеству L принадлежит сужение $f|_E$ функции f на любое измеримое множество E, содержащееся в множестве задания функции f.

---

* Впрочем, внимательный читатель увидит, что это обстоятельство в большинстве случаев совершенно несущественно: можно считать, что $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо подмножеств множества X произвольной природы.

Пусть J — отображение множества L в множество всех конечных вещественных чисел, обладающее следующими свойствами:

1) Если $f \in L$ — функция, заданная на множестве $E \in \mathfrak{M}$, и $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \Lambda$, E_1 $E_2 \in \mathfrak{M}$, то $J(f|_{E_1}) + J(f|_{E_2}) = J(f)$ ($f|_{E_j}$ — сужение функции f на множество E_j).

2) Если функции f и g, принадлежащие L, заданы на множестве $E \in \mathfrak{M}$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$, то $J(f) \leqslant J(g)$.

3) Если $E \in \mathfrak{M}$, $\mu E < +\infty$, а функция $f \in L$, заданная на множестве E, постоянна: $f(x) = c$ ($c \in R$) при всех $x \in E$, то $J(f) = c\mu E$.

Такое отображение J и есть интеграл по мере μ; если $f \in L$, то число $J(f)$ — это интеграл от функции f по мере μ.

В этом описании понятия интеграла мы пока не уточняем, из каких именно функций состоит множество L.

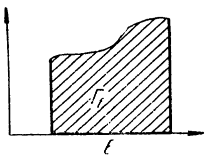

Рис. 4.

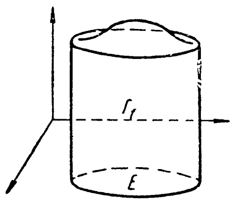

Рис. 5.

В математике и ее приложениях очень часто встречаются задачи, приводящие к исследованию интегралов по некоторой мере.

Приведем два примера.

Пример 1. Пусть C_ν^+ — множество всех функций f, обладающих следующими свойствами: а) множество задания функции f принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}^\nu$; б) функция f непрерывна на своем множестве задания; в) все значения функции f неотрицательны.

Пусть $f \in C_\nu^+$ — функция, заданная на множестве $E \in \mathfrak{M}^\nu$, и пусть $\Gamma_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}) \in R^{\nu+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in E, 0 \leqslant x_{\nu+1} \leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\}$ — подграфик функции f. Если $\nu = 1$, $E = [a, b]$, то Γ_f — это хорошо известная читателю „криволинейная трапеция“ (рис. 4), если $\nu = 2$, то Γ_f можно представлять себе в виде „цилиндрического бруса“ (рис. 5), ограниченного сверху графиком функции двух переменных f, снизу — множеством E, лежащим в плоскости (x_1, x_2). Можно доказать (и это будет сделано в § 5), что $\Gamma_f \in \mathfrak{M}^{\nu+1}$, т. е. множество Γ_f измеримо по Лебегу, и потому имеет смысл $\mu_{\nu+1}(\Gamma_f)$, какова бы ни была функция $f \in C_\nu^+$.

Рассмотрим множество L, состоящее из всех функций $f \in C_\nu^+$, таких, что $\mu_{\nu+1}(\Gamma_f) < +\infty$, и положим

$$J(f) = \mu_{\nu+1}(\Gamma_f) \quad (f \in L).$$

Проверим, что отображение J обладает свойствами 1) — 3), которые в данном случае имеют совсем простой геометрический смысл.

Начнем с условия 1).

Если $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}^\nu$, $E_1 \cap E_2 = \Lambda$, $E_1 \cup E_2 = E$, то, как легко видеть, $\Gamma(f|_{E_1}) \cup \Gamma(f|_{E_2}) = \Gamma(f)$, $\Gamma(f|_{E_1}) \cap \Gamma(f|_{E_2}) = \Lambda$ и потому $\mu_{\nu+1}(\Gamma_f) = J(f) = J(f|_{E_1}) + J(f|_{E_2})$.

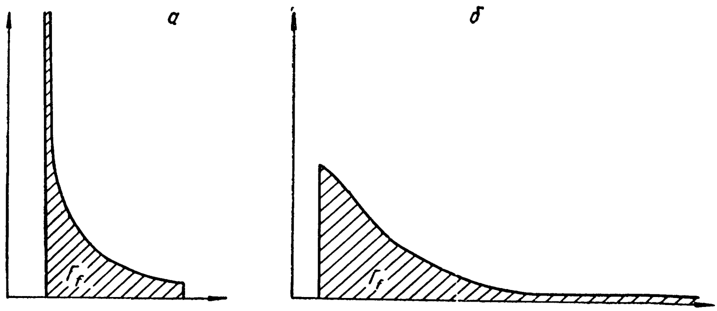

Рис. 6.

Условие 2) также легко проверить. Если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$, то $\Gamma_f \subset \Gamma_g$, и условие 2) следует из монотонности меры $\mu_{\nu+1}$.

Условие 3), совсем очевидное, например, тогда, когда множество E есть прямоугольник (размерности ν), проверяется несколько сложнее в том случае, когда E — произвольное множество конечной лебеговой меры (эта проверка будет выполнена в § 5 настоящей главы).

Итак, задача о вычислении меры подграфика приводит к интегралу по мере Лебега.

Ниже мы покажем, что интеграл J, заданный на $L = C_\nu^+$, действительно существует и что его можно распространить на значительно более широкий класс функций.

Отметим, что множество L, рассмотренное нами, содержит некоторые функции f, для которых подграфик Γ_f — неограниченное множество (рис. 6, *а*, *б*).

Задача о мере подграфика очень важна и поучительна. Но было бы заблуждением считать ее единственной задачей теории интеграла.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, состоящая из всех подмножеств множества R^ν, μ — мера, рассмотренная в примере 2

§ 2 гл. I ($p_\xi = 1$ при всех $\xi \in \Xi$), L состоит из всех суммируемых семейств вещественных чисел, заданных на подмножествах множества R^ν. Если $f \in L$, f задана на множестве $E \subset R^\nu$, то положим $J(f) = \sum\limits_{\xi \in \Xi \cap E} f(\xi)$ (f — семейство, заданное на множестве E). Условия 1) — 3) выполняются — это хорошо известные свойства суммируемых семейств вещественных чисел (добавление 2). Таким образом, теория суммируемых семейств вещественных чисел так же, как задача о лебеговой мере подграфика (на первый взгляд ничего общего не имеющая с этой теорией), приводит к интегралу по некоторой мере.

Теория интеграла имеет два аспекта.

Если заданная на измеримом множестве E функция f принадлежит множеству L, то число $J(f|_e)$ имеет смысл, каково бы ни было измеримое множество e, содержащееся в множестве задания функции f. Это число зависит, таким образом, и от функции f, и от выбора множества e. Если фиксировать множество e, то мы можем рассматривать отображение $f \to J(f|_e)$, т. е. изучать зависимость интеграла от подынтегральной функции f. Изучение этой зависимости — первый важный аспект теории интеграла. Если же фиксировать функцию f, то возникает функция множества $e \to J(f|_e)$, называемая иногда неопределенным интегралом от функции f. Изучение этой функции множества — второй, не менее важный аспект теории интеграла. Этот аспект теории интеграла связан с восстановлением некоторой функции множества по ее плотности. Отсылая за точными формулировками к основному тексту главы (§ 6), мы опишем здесь лишь очень приближенную схему задачи.

Предположим, что дана мера μ (скажем, для определенности, мера Лебега размерности три) и, кроме того, еще одна функция множества λ так же, как и μ, счетно-аддитивная, но не обязательно неотрицательная. Эту функцию можно истолковать как распределение электрического заряда, понимая λe как величину заряда, сосредоточенного на множестве e. В ряде случаев можно говорить о „плотности“ распределения λ относительно меры μ, т. е. о такой „точечной“ функции f, что для „малых“ (относительно меры μ) множеств e имеет место приближенное равенство $\lambda e \cong f(x)\mu e$, где $x \in e$. Значение $f(x)$ показывает, следовательно, величину заряда, приходящегося на единицу объема в точке x.

Если поставить задачу об определении функции множества по ее плотности f, то, при достаточно общих предположениях относительно функции f, оказывается, что значение λe может быть получено при помощи той же самой конструкции интеграла, о которой уже упоминалось выше, т. е. $\lambda e = J(f|_e)$. Таким образом, эта конструкция позволяет, исходя из данной меры и данной „точечной“ функции, образовывать новую функцию множества.

Многочисленные применения интеграла связаны в первую очередь с последней его трактовкой. Дело здесь в том, что хотя численные результаты наблюдений над физическими объектами естественно истолковывать как функции множества, аппарат математики гораздо лучше приспособлен для изучения более простых „точечных" функций. Интеграл же как раз и открывает возможность перехода от функций множества к „точечным" и обратно.

Не следует, однако, думать, что первый аспект теории интеграла не находит себе применений. Приложения здесь, пожалуй, даже более обширны, хотя в основном они относятся к „чистой" математике, т. е. этот подход к понятию интеграла обслуживает „внутренние" нужды математики и притом, как правило, нужды более или менее „высоких" ее областей. В полной мере с этой стороной дела читатель познакомится в последующих курсах. В книге же указанному вопросу уделено лишь немного места в § 4 этой главы и в гл. III.

§ 1. Определение интеграла

Конструкция интеграла использует аппарат так называемых разбиений, развитию которого и посвящен в основном настоящий параграф. Только после этого—в самом конце—мы дадим определение интеграла.

1.1. Определение 1. Рассмотрим множество $E \in \mathfrak{M}$. Система τ подмножеств множества E называется *разбиением* этого множества, если

1) τ — не более чем счетна;
2) каждое множество $A \in \tau$ измеримо, т. е. $A \in \mathfrak{M}$;
3) $A \cap B = \Lambda$ для любых различных множеств A, $B \in \tau$;
4) $E = \bigcup_{A \in \tau} A$.

Определение 2. Пусть σ и τ — разбиения одного и того же множества E. Говорят, что *разбиение* σ *мельче* (или *тоньше*) *разбиения* τ, и пишут $\sigma \succ \tau$, если для каждого множества $A \in \sigma$ можно указать множество $B \in \tau$, содержащее A.

В силу условия 3) определения, если $A \neq \Lambda$, такое множество B — единственно.

Предложение 1. Если σ и τ — разбиения множества E, причем $\sigma \succ \tau$, то, каковы бы ни были множества $A \in \sigma$, $B \in \tau$, справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений: $A \subset B$ или $A \cap B = \Lambda$.

Доказательство. Существует множество $B' \in \tau$, такое, что $A \subset B'$. Если $B' \neq B$, то, по условию 3), $B' \cap B = \Lambda$. Тем более $A \cap B = \Lambda$.

Предположим по-прежнему, что разбиение σ мельче разбиения τ. Возьмем какое-нибудь множество $B \in \tau$ и обозначим символом σ_B множество $\{A \in \sigma : A \subset B\}$.

Предложение 2. Система σ_B представляет собой разбиение множества B.

Доказательство. Проверим выполнение условий 1) — 4) определения 1. Условия 1) — 3) выполняются очевидным образом. Займемся условием 4) и докажем, что $B = \bigcup\limits_{A \in \sigma_B} A$. Из самого определения системы σ_B вытекает, что $B \supset \bigcup\limits_{A \in \sigma_B} A$. Рассмотрим элемент $x \in B$. Ясно, что $x \in E$, и, следовательно, в силу условия 4) найдется множество $A \in \sigma$, включающее элемент x. Так как $x \in A \cap B$, то в силу предложения 1 должно быть $A \subset B$, так что $A \in \sigma_B$, и поэтому $x \in \bigcup\limits_{A \in \sigma_B} A$.

Предложение 3. Пусть σ и τ — разбиения множества E, причем $\sigma \succ \tau$. Тогда $\sigma = \bigcup\limits_{B \in \tau} \sigma_B$. Если, кроме того, $\Lambda \overline{\in} \sigma$, то системы σ_B $(B \in \tau)$ попарно не пересекаются.

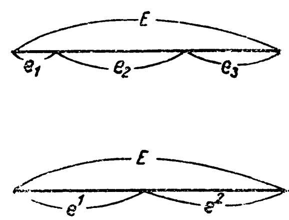

Рис. 7.

Доказательство. Очевидно, $\sigma_B \subset \sigma$ при любом $B \in \tau$. Следовательно, и $\bigcup\limits_{B \in \tau} \sigma_B \subset \sigma$. Если же множество $A \in \sigma$, то, поскольку $\sigma \succ \tau$, найдется множество $B_0 \in \tau$, содержащее A. Это означает, что $A \in \sigma_{B_0}$ и, тем более, $A \in \bigcup\limits_{B \in \tau} \sigma_B$.

Далее, если B_1, $B_2 \in \tau$ — различные множества и $A \in \sigma_{B_1} \cap \sigma_{B_2}$, то, ввиду условия 3), имеем $B_1 \cap B_2 = \Lambda$, а так как $A \subset B_1$ и $A \subset B_2$, то $A \subset B_1 \cap B_2 = \Lambda$, т. е. $A = \Lambda$.

1.2. Если τ' и τ'' — два произвольных разбиения множества E, то, разумеется, нельзя утверждать, что одно из них мельче другого: бывают и несравнимые разбиения (см. рис. 7). Но для любых двух разбиений τ' и τ'' множества E существует разбиение τ, более мелкое, чем τ' и τ''.

Определение 1. Если τ' и τ'' — разбиения множества E, то символом $\tau' \vee \tau''$ будет обозначаться система всех множеств вида $e' \cap e''$, где $e' \in \tau'$, $e'' \in \tau''$.

Предложение 1. Если τ', τ'' — два разбиения множества E, то система $\tau' \vee \tau''$ есть разбиение множества E, более мелкое, чем τ' и τ'':

$$\tau' \vee \tau'' \succ \tau', \quad \tau' \vee \tau'' \succ \tau''.$$

Доказательство. Все элементы системы $\tau' \vee \tau''$ принадлежат множеству $\mathfrak{M}$ (см. определение σ-кольца гл. I, п. 1.6); для проверки условия 1) заметим, что $\tau' \vee \tau''$ представляет собой систему всех членов семейства $\{e' \cap e''\}$ $((e', e'') \in \tau' \times \tau'')$. Поскольку система $\tau' \times \tau''$ не более чем счетна (д. 1, п. 7), этим же свойством обладает и система $\tau' \vee \tau''$ (д. 1, п. 7). Проверим условие 3), т. е. что различные множества из системы $\tau' \vee \tau''$ не имеют общих элементов. Пусть $e_1, e_3 \in \tau'$, $e_2, e_4 \in \tau''$ и пусть $x \in (e_1 \cap e_2) \cap (e_3 \cap e_4)$. Тогда $e_1 = e_3$, ибо разные множества, входящие в τ', не могут иметь общих точек; по аналогичной причине $e_2 = e_4$ и $e_1 \cap e_2 = e_3 \cap e_4$. Наконец, обратимся к условию 4). Опираясь на свойства операции объединения (см. д. 1, п. 6, свойство 6), будем иметь

$$\bigcup_{e \in \tau' \vee \tau''} e = \bigcup_{(e', e'') \in \tau' \times \tau''} e' \cap e'' = \bigcup_{e' \in \tau'} \Big(\bigcup_{e'' \in \tau''} (e' \cap e'')\Big) =$$
$$= \Big(\bigcup_{e' \in \tau'} (e' \cap \bigcup_{e'' \in \tau''} e'')\Big) = \bigcup_{e' \in \tau'} (e' \cap E) = \bigcup_{e' \in \tau'} e' = E.$$

Тот факт, что разбиение $\tau' \vee \tau''$ мельче, чем τ' и τ'', очевиден.

1.3. Пусть f — функция, заданная по крайней мере на множестве $E \in \mathfrak{M}$* со значениями в промежутке $[-\infty, +\infty]$, и пусть τ — разбиение множества E.

Условимся под символами $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$ и $(-\infty) \cdot 0$ понимать число нуль (д. 1, п. 1). Тогда с функцией f и разбиением τ можно связать два числовых семейства: $\{M(e) \mu e\}$ $(e \in \tau)$ и $\{m(e) \mu e\}$ $(e \in \tau)$, где $M(e) = \sup\limits_{x \in e} f(x)$, $m(e) = \inf\limits_{x \in e} f(x)$. Иногда вместо $M(e)$, $m(e)$ мы будем писать $M(f, e)$, $m(f, e)$.

Определение 1. Будем говорить, что разбиение τ множества E *допустимо* для функции f, если оба эти семейства суммируемы (д. 2, п. 1).

Определение 2. Если разбиение τ допустимо для функции f, то имеют смысл суммы семейств: $S(f, \tau, E) = \sum\limits_{e \in \tau} M(e) \mu e$ и $s(f, \tau, E) = \sum\limits_{e \in \tau} m(e) \mu e$, причем обе эти суммы конечны. Они называются *верхней* и *нижней суммами Дарбу*, соответствующими функции f и допустимому разбиению τ множества E. Иногда, если это не может привести к недоразумению, мы будем писать короче: $S(f, \tau)$, $s(f, \tau)$, или даже так: S_τ, s_τ.

Среди множеств, входящих в состав разбиения τ, может оказаться и пустое множество. Что бы ни понимать под $M(\Lambda)$ и $m(\Lambda)$ (по формальным соображениям следует положить $M(\Lambda) = -\infty$, $m(\Lambda) = +\infty$), произведения $M(e) \cdot \mu(e)$ и $m(e) \cdot \mu e$ будут равны нулю при $e = \Lambda$. Удаляя из разбиения τ пустое множество, мы получим систему τ_0, которая так же, как и τ, является разбиением множества E. Ясно, что разбиения τ и τ_0 одновременно допустимы или нет, причем в первом случае, как вытекает из сказанного выше, $S_\tau = S_{\tau_0}$, $s_\tau = s_{\tau_0}$.

---

* Это надо понимать так, что область определения функции f содержит множество E (см. д. 1, п. 3).

Поскольку в этом и в следующем параграфах разбиения будут нас интересовать лишь с точки зрения их допустимости и величины сумм Дарбу, *отмеченное обстоятельство позволяет считать, что данные разбиения (не пустого множества E) не содержат пустого множества.* Более того, если τ_1, τ_2 — разбиения множества $E \neq \Lambda$, то, допуская известную вольность в истолковании обозначений, мы под $\tau_1 \vee \tau_2$ будем понимать разбиение $(\tau_1 \vee \tau_2) \setminus \{\Lambda\}$ (разумеется, если пустое множество входит в состав разбиения $\tau_1 \vee \tau_2$). Множество всех разбиений множества E, допустимых для функции f, мы будем обозначать символом $T(f, E)$.

Множество $T(f, E)$ может быть пустым. Так, например, если $\mu E = +\infty$, а $f(x) = 1$ при всех $x \in E$, то $T(f, E) = \Lambda$. Труднее доказать, что то же самое верно, если μ_1 — мера Лебега размерности единица, а $E = (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ при всех $x \in (0,1]$ (см. лемму 2 в п. 3.8 и лемму в п. 3.9). С другой стороны, *если $\mu E < +\infty$, а функция f, заданная на множестве E, ограничена, то все разбиения множества E для нее допустимы:* ведь в этом случае числа $|M(e)|$ и $|m(e)|$ не превосходят $\sup\limits_{x \in E} |f(x)|$, так что

$$\sum_{e \in \tau} |M(e)| \mu e \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)| \sum_{e \in \tau} \mu e = \sup_{x \in E} |f(x)| \mu E < +\infty;$$

аналогичная оценка верна и для суммы $\sum\limits_{e \in \tau} |m(e)| \mu e$.

У читателя может возникнуть вопрос: почему наряду с конечными рассматриваются еще и счетные разбиения? Чтобы понять это, рассмотрим функцию f, заданную на промежутке $E = [0, +\infty)$ равенством $f(x) = 2^{-x}$ ($x \in [0, +\infty)$). В качестве меры μ возьмем меру Лебега μ_1. Легко понять, что никакое конечное разбиение не будет для этой функции допустимым. Пусть в самом деле τ — конечное разбиение промежутка $[0, +\infty)$. В силу условий 3) и 4) $+\infty = \mu_1 E = \sum\limits_{e \in \tau} \mu_1 e$, следовательно, хотя бы одно из множеств $e \in \tau$ имеет бесконечную меру, а так как $M(f, e) > 0$ при любом $e \subset [0, +\infty)$, то по крайней мере одно из чисел семейства $\{M(f, e) \mu e\}$ ($e \in \tau$) равно $+\infty$, в связи с чем семейство не может быть суммируемым. Между тем множество $T(f, [0, +\infty))$ допустимых разбиений отнюдь не пусто. Ему принадлежит, например, разбиение τ, составленное из всех промежутков вида $[k, k+1)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Можно было бы рассмотреть множество $E = (0,1)$ ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1$, $\mu = \mu_1$) и функцию $f : f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ ($x \in E$); и здесь ни одно конечное разбиение не является допустимым, хотя точно так же $T(f, E) \neq \Lambda$.

Лемма 1. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$, f — функция, заданная на множестве E. Если $\tau' \in T(f, E)$, а τ'' — разбиение множества E, более мелкое, чем τ', то $\tau'' \in T(f, E)$ и $S(f, \tau'', E) \leqslant S(f, \tau' E)$, $s(f, \tau', E) \leqslant s(f, \tau'', E)$.*

Иными словами, при измельчении разбиения его допустимость для данной функции не нарушается, верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя — не уменьшается. Последние неравенства имеют простой наглядный смысл, который читатель легко уяснит себе из рис. 8.

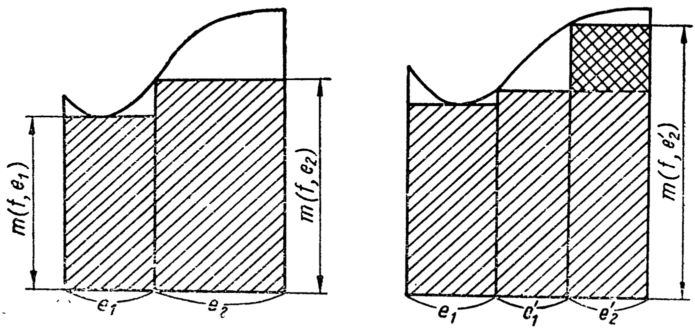

Рис. 8.

Доказательство. Вспомним, что $\tau'' = \bigcup\limits_{e_0 \in \tau'} \tau''_{e_0}$, причем $\tau''_{\bar{e}_0} \cap \tau''_{\bar{\bar{e}}_0} = \Lambda$, если $\bar{e}_0$, $\bar{\bar{e}}_0 \in \tau'$ и $\bar{e}_0 \neq \bar{\bar{e}}_0$.

Рассмотрим два числовых семейства: $\{t(e)\}$ $(e \in \tau'')$ и $\{T(e)\}$ $(e \in \tau'')$, где $t(e) = m(e_0)\mu e$, $T(e) = M(e_0)\mu e$, если $e \in \tau''$, $e_0 \in \tau'$ и $e \subset e_0$. Ясно, что если $e_0 \in \tau'$, $e \in \tau''_{e_0}$, то $m(e_0) \leqslant m(e) \leqslant M(e) \leqslant \leqslant M(e_0)$, и потому

$$t(e) = m(e_0)\mu e \leqslant m(e) \cdot \mu e \leqslant M(e)\mu e \leqslant M(e_0) \cdot \mu e = T(e) \quad (1)$$

при любом $e \in \tau''$.

Семейства $\{t(e)\}$ $(e \in \tau'')$ и $\{T(e)\}$ $(e \in \tau'')$ суммируемы. Это вытекает из замечания к следствию предложения 6 (д. 2, п. 4). Действительно, при каждом $e_0 \in \tau'$ либо $m(e_0)\mu e > 0$ при всех $e \in \tau''_{e_0}$, либо $m(e_0)\mu e \leqslant 0$ при всех $e \in \tau''_{e_0}$. Семейство $\{m(e_0) \cdot \mu e\}$ $(e \in \tau''_{e_0})$ суммируемо при каждом $e_0 \in \tau'$:

$$\sum_{e \in \tau''_{e_0}} m(e_0)\mu e = m(e_0) \sum_{e \in \tau''_{e_0}} \mu e = m(e_0) \cdot \mu e_0.$$

Кроме того, $\left| \sum\limits_{e \in \tau''_{e_0}} m(e_0)\mu e \right| = |m(e_0)|\mu e_0$ при любом $e_0 \in \tau'$, и из суммируемости семейства $\{m(e_0) \cdot \mu e_0\}$ $(e_0 \in \tau')$ следует суммируемость семейства $\left\{ \sum\limits_{e \in \tau''_{e_0}} m(e_0)\mu e \right\}$ $(e_0 \in \tau')$. Значит, применимо упомянутое выше замечание, и семейство $\{t(e)\}$ $(e \in \tau'')$ суммируемо, причем

$$\sum_{e \in \tau''} t(e) = \sum_{e_0 \in \tau'} \sum_{e \in \tau''_{e_0}} m(e_0)\mu e = \sum_{e_0 \in \tau'} m(e_0)\mu e_0 = s_{\tau'}.$$

Точно так же убедимся в суммируемости семейства $\{T(e)\}$ $(e \in \tau'')$ и в равенстве

$$\sum_{e \in \tau''} T(e) = S_{\tau''}.$$

Теперь из неравенств (1) следует (согласно предл. 3 (д. 2, п. 4)) и суммируемость семейств $\{m(e)\cdot\mu e\}$ $(e \in \tau'')$, $\{M(e)\mu e\}$ $(e \in \tau'')$, и неравенства

$$s_{\tau'} = \sum_{e \in \tau''} t(e) \leqslant \sum_{e \in \tau''} m(e)\mu e \leqslant \sum_{e \in \tau''} M(e)\mu e \leqslant \sum_{e \in \tau''} T(e) = S_{\tau'}, \qquad (2)$$

т. е.

$$s_{\tau'} \leqslant s_{\tau''} \leqslant S_{\tau''} \leqslant S_{\tau'}.$$

Лемма доказана.

1.4. Лемма 2. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$ и пусть функция f задана по крайней мере на E. Если $T(f, E) \neq \Lambda$, то*

$$-\infty < \sup_{\tau \in T(f, E)} s(f, \tau, E) \leqslant \inf_{\tau \in T(f, E)} S(f, \tau, E) < +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in T(f, E)$. Тогда, очевидно, $-\infty < s_{\tau_1}, S_{\tau_2} < +\infty$. Рассмотрим разбиение $\tau_1 \vee \tau_2$ (см. п. 1.2). Оно мельче, чем τ_1 и τ_2, и потому допустимо для функции f — это следует из леммы 1. Из этой же леммы следует, что

$$s_{\tau_1} \leqslant s_{\tau_1 \vee \tau_2},$$
$$S_{\tau_1 \vee \tau_2} \leqslant S_{\tau_2}.$$

Но нижняя сумма Дарбу, конечно, не превосходит верхней суммы, отвечающей тому же разбиению, так что

$$s_{\tau_1 \vee \tau_2} \leqslant S_{\tau_1 \vee \tau_2}.$$

Теперь ясно, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$ каковы бы ни были $\tau_1, \tau_2 \in T(f, E)$. Последнее неравенство показывает, что при любом $\tau_2 \in T(f, E)$ число S_{τ_2} является верхней границей числового семейства $\{s_\tau\}$ $(\tau \in T(f, E))$, и потому

$$-\infty < s_{\tau_1} \leqslant \sup_{\tau \in T(f, E)} s_\tau \leqslant S_{\tau_2} < +\infty. \qquad (3)$$

Значит, число $\sup_{\tau \in T(f, E)} s_\tau$ есть одна из нижних границ числового семейства $\{S_{\tau_2}\}$ $(\tau_2 \in T(f, E))$, и

$$-\infty < \sup_{\tau \in T(f, E)} s_\tau \leqslant \inf_{\tau \in T(f, E)} S_\tau \leqslant S_{\tau_2} < +\infty. \qquad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует утверждение леммы.

1.5. Пусть, как и выше, множество E принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}$, f — функция со значениями в промежутке $[-\infty, \infty]$, заданная по крайней мере на E.

Определение 1. Если $T(f, E) \neq \Lambda$ и

$$\sup_{\tau \in T(f, E)} s(f, \tau, E) = \inf_{\tau \in T(f, E)} S(f, \tau, E), \tag{5}$$

то функция f называется *суммируемой на множестве E по мере* μ, а число $\sup\limits_{\tau \in T(f, E)} s(f, \tau, E)$ — *интегралом по множеству* E от функции f по мере μ. Это число обозначают так: $\int\limits_E f d\mu$.

Определение 2. Если $\mathfrak{M}^\nu$ — σ-алгебра всех подмножеств множества R^ν, измеримых по Лебегу, а μ_ν — мера Лебега, то интеграл $\int\limits_E f d\mu_\nu$ $(E \in \mathfrak{M}^\nu)$ называют ν-кратным интегралом Лебега, а функцию f — суммируемой по Лебегу. Если $\nu = 2$ или 3, то интеграл Лебега называют *двойным* или, соответственно, *тройным интегралом*. Если $\nu = 1$, то интеграл Лебега часто записывают так: $\int\limits_E f(x)\, dx$, при $\nu = 2$ — $\iint\limits_E f(x, y)\, dx dy$, при $\nu = 3$ — $\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx dy dz$, и т. д. Если $E = [\alpha, \beta]$ — промежуток, то вместо $\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(x)\, dx$ часто пишут $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\, dx$.*

Из определения интеграла сразу следует, что если f суммируема на множестве E, а $\tau \in T(f, E)$, то

$$s(f, \tau, E) \leqslant \int\limits_E f d\mu \leqslant S(f, \tau, E). \tag{6}$$

Несколько слов в связи с обозначением интеграла. Из определения ясно, что об интеграле $\int\limits_E f d\mu$ имеет смысл говорить в том случае, когда известны три вещи: множество E, принадлежащее σ-алгебре $\mathfrak{M}$, функция f, заданная по крайней мере на множестве E, и мера μ, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{M}$. Поэтому участие буквы x в обозначении $\int\limits_E f(x)\, dx$ (так же, как и буквы y в обозначении $\iint\limits_E f(x, y)\, dx dy$) может быть непонятным. В действительности эта буква в данном случае

---

* Тот же символ $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\, dx$ употребляют и для обозначения интеграла по промежутку иного типа с теми же концами α, β: $\int\limits_{[\alpha,\beta)} f(x)\, dx$, $\int\limits_{(\alpha,\beta)} f(x) dx$ (см. § 2).

ничего не обозначает, ее можно заменить любой другой $\left(\text{например, } \int_E f(t)\,dt, \int_E f(ы)\,dы\right)$ или вообще не писать. Пишут ее в основном по традиции, восходящей к создателям интегрального исчисления. Кроме того, такая запись иногда бывает удобной по чисто техническим причинам.

1.6. Критерий суммируемости, о котором идет речь в теореме 1 (1.II), будет нам полезен для вывода простейших свойств интеграла.

Теорема 1 (1.II). *Пусть $E \in \mathfrak{M}$, функция f задана по крайней мере на множестве E. Для того чтобы функция f была суммируемой на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое разбиение $\tau \in T(f, E)$, что*

$$S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) \leqslant \varepsilon$$

(*или, короче,* $S_\tau - s_\tau \leqslant \varepsilon$).

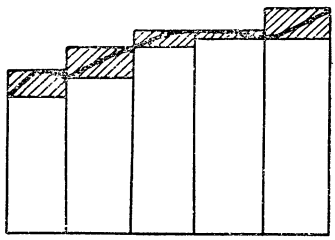

Рис. 9.

Это утверждение означает, грубо говоря, следующее: функция f суммируема на множестве E в том и только в том случае, когда „зазор“ между входящей и выходящей фигурами на рис. 9 за счет выбора разбиения может быть сделан сколь угодно малым (по площади).

Доказательство. Необходимость. Если функция f суммируема на множестве E, то для любого положительного числа ε существует такое разбиение $\tau_1 \in T(f, E)$, что $S_{\tau_1} \leqslant \int_E f d\mu + \frac{\varepsilon}{2}$, так как $\int_E f d\mu$ есть точная нижняя граница числового семейства $\{S_\tau\}$ $(\tau \in T(f, E))$. По аналогичной причине (см. определение 1, п. 5) существует разбиение $\tau_2 \in T(f, E)$, такое, что $\int_E f d\mu - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_{\tau_2}$. Но $s_{\tau_2} \leqslant s_{\tau_1 \vee \tau_2} \leqslant S_{\tau_1 \vee \tau_2} \leqslant S_{\tau_1}$ (см. лемму 1). Поэтому суммы $S_{\tau_1 \vee \tau_2}$ и $s_{\tau_1 \vee \tau_2}$ содержатся в промежутке $\left[\int_E f d\mu - \frac{\varepsilon}{2}, \int_E f d\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, и, значит, в качестве разбиения $\tau \in T(f, E)$, для которого $S_\tau - s_\tau \leqslant \varepsilon$, можно взять $\tau_1 \vee \tau_2$.

Достаточность. Если условие теоремы выполнено, то $T(f, E) \neq \Lambda$. Проверим, что выполняется равенство (5). С этой целью, взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, найдем такое разбиение $\tau_0 \in T(f, E)$, что $S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leqslant \varepsilon$. Но ведь

$$s_{\tau_0} \leqslant \sup_{\tau \in T(f, E)} s_\tau \leqslant \inf_{\tau \in T(f, E)} S_\tau \leqslant S_{\tau_0}$$

(см. лемму 2, п. 1.4). Поэтому

$$0 \leqslant \inf_{\tau \in T(f, E)} S_\tau - \sup_{\tau \in T(f, E)} s_\tau \leqslant S_{\tau_0} - s_{\tau_0} \leqslant \varepsilon,$$

каково бы ни было положительное число ε. Значит, $\inf_{\tau \in T(f, E)} S_\tau - \sup_{\tau \in T(f, E)} s_\tau = 0$, и теорема доказана.

Замечание 1. Пусть $\tau \in T(f, E)$ и $S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) \leqslant \varepsilon$. Если $\tau' \succ \tau$, то $\tau' \in T(f, E)$ и $S(f, \tau', E) - s(f, \tau', E) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Включение $\tau' \in T(f, E)$ следует из леммы 1 п. 1.4. Из этой же леммы следует, что если в разности $S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E)$ разбиение τ заменить более мелким разбиением τ', то уменьшаемое не возрастет, а вычитаемое не уменьшится, так что и разность не возрастет.

Замечание 2. Пусть функция f такова, что существует разбиение $\tau \in T(f, E)$, для которого $S(f, \tau, E) = s(f, \tau, E)$. Тогда функция f суммируема на множестве E, и $S(f, \tau, E) = s(f, \tau, E) = \int_E f d\mu$.

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы и неравенства (6).

Это замечание позволяет решить вопрос о суммируемости так называемых ступенчатых функций.

Определение 1. Пусть τ — разбиение множества $E \in \mathfrak{M}$. Если функция f, заданная на множестве E, постоянна на каждом множестве $e \in \tau$, то f называется *ступенчатой функцией*.

Предложение 1. Пусть f — ступенчатая функция и пусть $c(e)$ — значение, которое функция f принимает во всех точках множества $e \in \tau$. Если числовое семейство $\{c(e)\mu e\}$ $(e \in \tau)$ суммируемо, то функция f суммируема на E по мере μ и $\int_E f d\mu = \sum_{e \in \tau} c(e)\mu e$.

Доказательство. В этом случае $\tau \in T(f, E)$ и $s(f, \tau, E) = S(f, \tau, E) = \sum_{e \in \tau} c(e)\mu e$, а в силу неравенства (6) $s(f, \tau, E) = \int_E f d\mu$.

Суммируемость семейства $\{c(e)\mu e\}$ $(e \in \tau)$ не только достаточна, но и необходима для суммируемости ступенчатой функции f. В этом мы убедимся позже.

Следствие 1. *Если функция f постоянна на множестве $E \in \mathfrak{M}$ и если произведение $c\mu E$ конечно (c — значение функции f), то f суммируема на множестве E и $\int_E f d\mu = c\mu E$.*

Предложение 2. Для того чтобы функция f, заданная по крайней мере на множестве $E \in \mathfrak{M}$, была суммируемой на E по мере μ, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность разбиений $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, обладающая следующими свойствами:

1) $\tau_n \in T(f, E)$ $(n=1, 2, \dots)$;
2) $\tau_{n+1} \succ \tau_n$ $(n=1, 2, \dots)$;
3) $S(f, \tau_n, E) - s(f, \tau_n, E) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Если $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность разбиений, обладающая свойствами 1) и 3), то $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, \tau_n, E) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, \tau_n, E) = \int\limits_E f d\mu$.

Доказательство. Достаточность очевидна даже без условия 2). Докажем необходимость.

Необходимость. По теореме 1 при любом натуральном n существует разбиение $\bar{\tau}_n \in T(f, E)$, такое, что $S(f, \bar{\tau}_n, E) - s(f, \bar{\tau}_n, E) \leqslant \frac{1}{n}$. Пусть теперь $\tau_1 = \bar{\tau}_1$, $\tau_2 = \tau_1 \vee \bar{\tau}_2$, $\tau_3 = \tau_2 \vee \bar{\tau}_3$, $\tau_{n+1} = \tau_n \vee \bar{\tau}_{n+1}$ $(n=1, 2, \dots)$. Все разбиения τ_n допустимы, так как $\tau_n \succ \bar{\tau}_n$, а $\bar{\tau}_n \in T(f, E)$ (см. лемму 1). В силу замечания 1 $S(f, \tau_n, E) - s(f, \tau_n, E) \leqslant S(f, \bar{\tau}_n, E) - s(f, \bar{\tau}_n, E) \leqslant \frac{1}{n}$. Ясно также, что $\tau_{n+1} \succ \tau_n$. Если τ_n — последовательность разбиений, обладающая свойствами 1) и 3), то из (6) следует, что каждая из последовательностей $\{s_{\tau_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_{\tau_n}\}_{n=1}^{\infty}$ имеет пределом число $\int\limits_E f d\mu$.

Свойство 3) из предложения можно записать несколько иначе, используя понятие колебания функции на множестве.

Определение 2. Если f — функция, заданная на множестве E, то *колебанием функции f на множестве e*, содержащемся в множестве E, мы назовем число $\omega(f, e) = M(f, e) - m(f, e)$, если эта разность имеет смысл, и равное нулю в противном случае.

Число $\omega(f, e)$ показывает, грубо говоря, на сколько сильно могут отличаться друг от друга значения, принимаемые функцией f на множестве e. Равенство $\omega(f, e) = 0$ означает, что функция f постоянна на множестве e.

Если теперь $\tau \in T(f, E)$, то $S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) = \sum\limits_{e\in\tau} \omega(f, e)\mu e$. В самом деле, ввиду суммируемости семейств $\{M(f, e)\cdot\mu e\}$ $(e \in \tau)$ и $\{m(f, e)\cdot\mu e\}$ $(e \in \tau)$ каждое произведение $M(e)\cdot\mu e$ и $m(e)\cdot\mu e$ $(e \in \tau)$ конечно. Следовательно, если $M(e) = \pm\infty$ или $m(e) = \pm\infty$, то необходимо должно быть $\mu e = 0$. Поэтому, обозначая $\tau^* = \{e \in \tau : |m(f, e)|, |M(f, e)| < +\infty\}$, будем иметь

$$S_\tau = \sum_{e\in\tau} M(f, e)\cdot\mu e = \sum_{e\in\tau^*} M(f, e)\mu e;$$

$$s_\tau = \sum_{e\in\tau} m(f, e)\mu e = \sum_{e\in\tau^*} m(f, e)\mu e.$$

Но тогда

$$S(f, \tau, E)-s(f, \tau, E)=\sum_{e\in\tau^*}(M(f, e)-m(f, e))\cdot\mu e=$$
$$=\sum_{e\in\tau^*}\omega(f, e)\mu e=\sum_{e\in\tau}\omega(f, e)\cdot\mu e,$$

ибо для $e\in\tau\setminus\tau^*$, как указывалось, $\mu e=0$ и $\omega(f, e)\cdot\mu e=0$. Поэтому свойство 3) из предложения можно было бы сформулировать так:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{e\in\tau_n}\omega(f, e)\cdot\mu e=0.$$

Замечание 3. Если функция f на множестве e не принимает бесконечных значений, то

$$\omega(f, e)=\sup_{(x, y)\in e\times e}(f(x)-f(y))=\sup_{(x, y)\in e\times e}|f(x)-f(y)|.$$

Доказательство. В самом деле, $f(x)\leqslant M(e)$, $-f(y)\leqslant -m(e)$ при любых $x, y\in e$. Числа $M(e)$ и $m(e)$ не могут быть одновременно равными $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому

$$f(x)-f(y)\leqslant M(e)-m(e),$$

и

$$\sup_{(x, y)\in e\times e}(f(x)-f(y))\leqslant M(e)-m(e).$$

С другой стороны, существуют последовательности $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$, все члены которых принадлежат множеству e, такие, что $\lim\limits_{p\to\infty}f(x_p)=M(e)$, $\lim\limits_{p\to\infty}f(y_p)=m(e)$.

Применяя теорему о пределе разности (что законно, так как разность $M(e)-m(e)$ имеет смысл), видим, что

$$f(x_p)-f(y_p)\xrightarrow[p\to\infty]{} M(e)-m(e), \text{ и тем самым } M(e)-m(e)=$$
$$=\sup_{(x, y)\in e\times e}(f(x)-f(y)).$$

Тот факт, что последний supremum равен $\sup\limits_{(x, y)\in e\times e}|f(x)-f(y)|$, очевиден.

Разумеется, теорему 1 можно теперь сформулировать так: „Для того чтобы функция f была суммируема на измеримом множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовало разбиение $\tau\in T(f, E)$, такое, что $\sum\limits_{e\in\tau}\omega(f, e)\cdot\mu e<\varepsilon$." Это утверждение позволяет следующим образом очень грубо охарактеризовать свойство функции быть суммируемой: суммируемость функции на множестве E означает, что E можно разбить на такие измеримые подмножества e, что произведения $|m(e)|\cdot\mu e$, $|M(e)|\cdot\mu e$ и $\omega(e)\,\mu e$ не слишком велики. Это значит, что если на множестве e функция очень велика или слишком сильно меняется, то мера такого множества мала. Иногда такое разбиение можно найти, выбирая множества e не слишком разбросанными, т. е. так, чтобы любые две точки x, $y \in e$ находились на малом расстоянии друг от друга. Такой выбор разбиения полезен, конечно, для функций, которые мало меняются на множествах малого диаметра, т. е. для непрерывных функций.

Переходя к точному изложению, сформулируем следующий факт.

Теорема 2 (1.II). *Пусть K — ограниченное замкнутое множество точек пространства R^ν. Тогда любая функция, непрерывная на множестве K, суммируема по мере Лебега на этом множестве.**

Доказательство. По теореме Вейерштрасса, всякая функция f, непрерывная на K, ограничена на K, и потому любое разбиение K допустимо для f. Взяв теперь произвольное число $\varepsilon > 0$, на основании теоремы Кантора мы найдем такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ при любых x, $y \in K$, удовлетворяющих неравенству $\|x - y\|_\nu \leqslant \delta$ (д. 3, п. 5). Пусть теперь τ — любое разбиение множества K, состоящее из множеств диаметра (д. 3, п. 5, определение 2), не превосходящего δ.

Разбиение τ можно построить следующим способом. Возьмем прямоугольник $P = [\alpha, \beta) \times \ldots \times [\alpha, \beta)$, содержащий множество K ($\alpha, \beta \in R$). Выберем натуральное число n столь большим, что

$$\frac{\beta - \alpha}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{\nu}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ясно, что

$$[\alpha, \beta) = \bigcup_{s=1}^{n} \Delta_s \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

где

$$\Delta_s = \left[\alpha + (s-1)\frac{\beta - \alpha}{n}, \quad \alpha + s \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ — натуральные числа, не превосходящие n. Обозначим прямоугольник $\Delta_{s_1} \times \ldots \times \Delta_{s_\nu}$ через $P_{(s_1, \ldots, s_\nu)}$. Тогда $\bigcup\limits_{s \in \underbrace{\mathbf{N}_n \times \ldots \times \mathbf{N}_n}_{\nu}} P_s = P$ и $K = \bigcup\limits_{s \in \underbrace{\mathbf{N}_n \times \ldots \times \mathbf{N}_n}_{\nu}} K_s$, где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_\nu)$ и $K_s = P_s \cap K^\nu$ ($\mathbf{N}_n$ определено в д. 1, п. 1). Заметим теперь, что $\operatorname{diam} P_s < \delta$, и тем более $\operatorname{diam} K_s < \delta$. Кроме того, множество K_s измеримо (ведь $K \in \mathfrak{M}^\nu$, будучи замкнутым

* На самом деле, в теореме 2 можно было бы говорить не о мере Лебега, а о любой мере μ, заданной на $\mathfrak{M}^\nu$ и такой, что $\mu K < +\infty$ (см. ниже лемму 1 в п. 3.8).

множеством, и прямоугольник P_s также принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}^{\nu}$). Наконец, $P_{s'} \cap P_{s''} = \Lambda$, если $s' \neq s''$, и потому $K_{s'} \cap K_{s''} = \Lambda$, если $s' \neq s''$. Итак, система множеств семейства $\{K_s\}$ $(s \in \underbrace{\mathbf{N}_n \times \ldots \times \mathbf{N}_n}_{\nu})$ — требуемое разбиение τ множества K.

При любом $e \in \tau$ $\omega(f, e) \leqslant \varepsilon$ и $\sum_{e \in \tau} \omega(f, e) \mu_\nu e \leqslant \varepsilon \sum_{e \in \tau} \mu_\nu e = \varepsilon \mu_\nu K$.

Теорема доказана.

В частности, всякая функция, непрерывная на сегменте $[a, b] \subset R^1$, суммируема на этом сегменте (по мере Лебега).

Но далеко не всегда сумму $\sum_{e \in \tau} \omega(f, e) \cdot \mu e$ можно сделать малой, разбивая множество E на множества малого диаметра.

Рассмотрим, например, так называемую функцию Дирихле. Эта функция f задана на промежутке $[0,1]$ следующим образом: $f(x) = 0$, если $x \in [0, 1]$ и $x \in J$, где J — множество всех иррациональных чисел, содержащихся в промежутке $[0,1]$, $f(x) = 1$, если $x \in [0, 1] \setminus J$. Тогда при разбиении множества $E = [0, 1]$ на сколь угодно малые промежутки

$$\sum_{e \in \tau} \omega(f, e) \mu_1(e) = 1.$$

Но зато эта сумма сразу станет равной нулю, если разбиение τ будет состоять из двух множеств, „разбросанных" по всему $E: \tau = \{J, [0, 1] \setminus J\}$ (напомним, что множество всех рациональных чисел, а с ним и множество $[0,1] \setminus J$, счетно (д. 1, п. 7, предл. 5)), и потому $\mu_1([0,1] \setminus J) = 0$.

Этот пример убедительно показывает, что в приводимых нами в этой главе иллюстрациях есть один существенный недостаток: множества e, принадлежащие какому-нибудь разбиению τ, в случае $n = 1$ изображаются в виде промежутков. На самом деле, желая изучать любые суммируемые по Лебегу (а не только непрерывные на промежутке) функции, мы обязаны рассматривать разбиения, состоящие из любых измеримых по Лебегу множеств. Но нарисовать произвольное измеримое множество трудно! Этим и вызван отмеченный дефект наших иллюстраций.

К вопросу о признаках суммируемости мы вернемся в § 3.

Определение 3. Пусть $\tau \in T(f, E)$ и пусть $\{\xi_e\}$ $(e \in \tau)$ — семейство точек множества E, такое, что $\xi_e \in e$ при каждом $e \in \tau$. Такое семейство ξ будем называть *оснащением разбиения* τ.

Легко видеть (см. предл. 3, д. 2, п. 4), что числовое семейство $\{f(\xi_e) \cdot \mu e\}$ $(e \in \tau)$ суммируемо, так как $m(f, e) \cdot \mu e \leqslant f(\xi_e) \mu e \leqslant M(f, e) \cdot \mu e$ при всех $e \in \tau$, и разбиение τ допустимо: $\tau \in T(f, e)$. Сумма этого семейства называется интегральной суммой (или суммой Римана), соответствующей разбиению τ и оснащению ξ. Мы будем обозначать эту сумму символом

$\sigma(f, \tau, \xi, E)$. Понятие интегральной суммы легко проиллюстрировать на чертеже (рис. 10), где площадь заштрихованной фигуры равна сумме Римана. Оказывается, что интеграл от суммируемой функции является в некотором смысле пределом римановых сумм. Точный смысл этого утверждения таков.

Предложение 3. Если функция f суммируема на множестве E, то для любого положительного числа ε существует такое разбиение $\tau_\varepsilon \in T(f, E)$, что для любого разбиения $\tau \in T(f, E)$, более мелкого, чем τ_ε, и для любого оснащения ξ разбиения τ выполнено неравенство

$$\left|\sigma(f, \tau, \xi, E) - \int_E f d\mu\right| \leqslant \varepsilon.$$

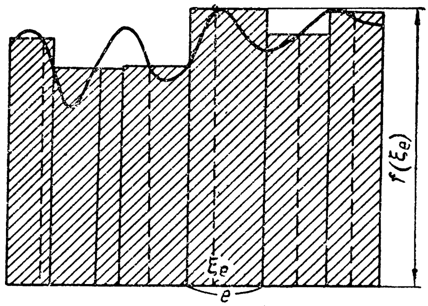

Рис. 10.

Доказательство. В качестве τ_ε можно взять разбиение, о котором говорится в теореме 1 (1.II), т. е. такое $\tau_\varepsilon \in T(f, E)$, что при всех $\tau \succ \tau_\varepsilon$ выполнено неравенство $S_\tau - s_\tau \leqslant \varepsilon$ (см. замечание 1). Очевидно, что при любом оснащении ξ разбиения τ

$$s_\tau \leqslant \sigma(f, \tau, \xi, E) \leqslant S_\tau.$$

В силу неравенства (6) $\int\limits_E f d\mu \in [s_\tau, S_\tau]$, и наше утверждение доказано.

Учитывая предложение 2, можно сказать и так: если функция f суммируема на множестве E, то для любой последовательности $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$, обладающей свойствами 1) и 3) из предложения 2, всегда оказывается $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, \tau_n, \xi_n, E) = \int\limits_E f d\mu$, какова бы ни была последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ оснащений разбиений τ_n.

§ 2. Элементарные свойства интеграла

Теперь мы приступим к выполнению программы, намеченной во введении: будем изучать зависимость интеграла от подынтегральной функции (теорема 2) и зависимость интеграла от множества интегрирования (теорема 3). Но начать нам придется с исследования свойств интеграла, связанных с множествами меры нуль.

2.1. Рассмотрим какое-либо множество E, содержащееся в множестве R^ν. Обозначим через P некоторое свойство такого рода, что высказывание: „элемент x обладает или не обладает свойством P" имеет смысл для любого $x \in E$. Это означает, что в нашем распоряжении имеется возможность для каждого данного элемента $x \in E$ установить, будет ли упомянутое высказывание истинным или ложным.

Определение 1. Предположим, что существует множество e, содержащееся в множестве E, такое, что $\mu e = 0$, причем любой элемент $x \in E \setminus e$ обладает свойством P, т. е. все элементы, которые не обладают свойством P, входят в множество e. В этом случае говорят, что *почти все* элементы множества E обладают свойством P, или также что *почти всюду* (*почти везде*) на E имеет место свойство P. В конкретных ситуациях часто применяют сокращенные формулировки. Так, например, если на множестве задана вещественная функция f, то вместо того, чтобы сказать „почти все элементы $x \in E$ обладают тем свойством, что число $f(x)$ конечно", употребляют выражение „функция f почти всюду на E (или почти на всем E) конечна" (это утверждение означает, что $\mu\{x \in E : f(x) = \pm\infty\} = 0$). *

Следует иметь в виду, что термин „почти всюду" предполагает наличие меры, и содержание этого термина определяется рассматриваемой мерой. В тех случаях, когда отсутствие упоминания о мере может привести к недоразумениям, мы будем говорить „почти везде относительно меры μ".

Теорема 1 (2.II). *Пусть E — измеримое множество и f — вещественная функция, определенная по крайней мере на E. Тогда*

а) *если функция f суммируема на E, то f конечна почти везде на E, т. е.* $\mu\{x \in E : |f(x)| = +\infty\} = 0$;

б) *если $\mu E = 0$, то f суммируема на E по мере μ и* $\int\limits_E f d\mu = 0$;

в) *пусть множество $E_0 \subset E$, причем $\mu E_0 = 0$. Пусть функция g задана по крайней мере на множестве $E \setminus E_0$ и $f(x) = g(x)$ при всех $x \in E \setminus E_0$. Если одна из функций f или g суммируема (соответственно на множестве E или $E \setminus E_0$), то суммируема и другая. При этом* $\int\limits_{E \setminus E_0} g d\mu = \int\limits_E f d\mu$.

Доказательство. а) Мы докажем, что если для функции f имеется хоть одно допустимое разбиение τ множества E, то f почти везде конечна. Требуемый результат вытекает отсюда, так как для суммируемой функции согласно определению 1 из п. 1.5 множество $T(f, E)$ всех допустимых разбиений не пусто.

Итак, пусть τ — допустимое разбиение множества E. Обозначим через τ_0 систему всех множеств A, входящих в разбиение τ, таких, что хоть одно из чисел $M(f, A)$ или $m(f, A)$ — бесконечно. Поскольку семейства $\{M(f, A)\mu A\}$ $(A \in \tau)$

* Напомним, что мера всегда предполагается полной, если не оговорено противное.

и $\{m(f, A)\mu A\}$ $(A \in \tau)$ суммируемы, произведения $M(f, A)\mu A$ и $m(f, A)\mu A$ конечны для любого $A \in \tau$. Если $A \in \tau_0$, т. е. если $M(f, A)$ или $m(f, A)$ равно $\pm\infty$, то в силу только что сказанного должно быть $\mu A = 0$. Понятно, что и множество $e = \bigcup\limits_{A \in \tau_0} A$ также имеет меру нуль (см. предл. 1 и 2 из гл. I, п. 3.3). Пусть $x \in E \setminus e$. Существует множество $A_0 \in \tau$, включающее элемент x. Поскольку $x \overline{\in} e$, множество A_0 не может входить в систему τ_0; следовательно, числа $m(f, A_0)$ и $M(f, A_0)$ конечны. Но $m(f, A_0) \leqslant f(x) \leqslant M(f, A_0)$, так что конечным оказывается и $f(x)$.

Таким образом, число $f(x)$ конечно, каков бы ни был элемент $x \in E \setminus e$. Иными словами, функция f почти везде на E конечна.

б) Так как $\mu E = 0$, то при любом разбиении τ множества E любое из множеств $e \in \tau$ (поскольку оно содержится в E) также имеет меру нуль. Следовательно, числовые семейства $\{M(e)\mu e\}$ $(e \in \tau)$ и $\{m(e)\mu e\}$ $(e \in \tau)$ состоят только из нулей (см. соглашение в п. 1.3 насчет произведений $+\infty \cdot 0$ и $-\infty \cdot 0$), и, значит, все разбиения множества E допустимы для функции f. Далее очевидно, что любая сумма Дарбу (как верхняя, так и нижняя) равна нулю. Тем самым функция f суммируема и $\int\limits_E f d\mu = 0$.

в) Пусть, например, функция g суммируема на множестве $E_1 = E \setminus E_0$. Взяв число $\varepsilon > 0$, мы на основании теоремы 1 (1.II) сможем подобрать такое допустимое (для функции g) разбиение τ_1 множества E_1, что

$$S(g, \tau_1, E_1) - s(g, \tau_1, E_1) \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Рассмотрим далее систему τ, состоящую из всех множеств, входящих в τ_1, и множества E_0. Система τ, как нетрудно показать, является разбиением множества E. Остановимся на проверке только условия 4) из 1.1. Имеем

$$\bigcup_{A \in \tau} A = E_0 \cup \bigcup_{A \in \tau_1} A = E_0 \cup E_1 = E.$$

Докажем, что разбиение τ допустимо для функции f. Рассмотрим множество $A \in \tau$. Если $A = E_0$, то ввиду того, что $\mu E_0 = 0$, будет $M(f, E_0)\mu E_0 = m(f, E_0)\mu E_0 = 0$. Если же $A \neq E_0$, то $A \in \tau_1$ и, следовательно, $A \subset E_1$. Стало быть (по условию $f(x) = g(x)$ для всех $x \in E_1$), $M(f, A) = M(g, A)$ и $m(f, A) = m(g, A)$.

Таким образом, семейство $\{M(f, A)\mu A\}$ $(A \in \tau)$ отличается от семейства $\{M(g, A)\mu A\}$ $(A \in \tau_1)$ лишь одним — нулевым членом и поскольку второе из указанных семейств суммируемо, суммируемо и первое. Кроме того,

$$S(f, \tau, E) = \sum_{A\in\tau} M(f, A)\mu A = M(f, E_0)\mu E_0 + \sum_{A\in\tau_1} M(f, A)\mu A =$$
$$= \sum_{A\in\tau_1} M(g, A)\mu A = S(g, \tau_1, E_1). \tag{2}$$

Аналогично устанавливается суммируемость семейства $\{m(f, A)\mu A\}$ $(A\in\tau)$ и равенство

$$s(f, \tau, E) = s(g, \tau_1, E_1). \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) \leqslant \varepsilon,$$

а это позволяет заключить о суммируемости (на E) функции f.

Ввиду того что

$$s(f, \tau, E) \leqslant \int_E f d\mu \leqslant S(f, \tau, E), s(g, \tau_1, E_1) \leqslant \int_E g d\mu \leqslant S(g, \tau_1, E_1),$$

то, снова учитывая (1), (2) и (3), можем написать $\left| \int_E f d\mu - \int_E g d\mu \right| \leqslant \varepsilon$, что вследствие произвольности ε может быть лишь в случае, когда $\int_E f d\mu = \int_{E_1} g d\mu$.

Предположим теперь, что суммируема (на множестве E) функция f. Взяв опять число $\varepsilon > 0$ и снова воспользовавшись критерием теоремы 1 (1.II), найдем такое допустимое (для функции f) разбиение τ множества E, что

$$S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим через τ_0 систему, состоящую из множеств E_0 и $E_1 = E \setminus E_0$: $\tau_0 = \{E_0, E_1\}$. Нетрудно проверить, что τ_0 — это также разбиение множества E. Согласно лемме 1 из 1.3, разбиение $\tilde{\tau} = \tau \vee \tau_0$ допустимо (для функции f), причем

$$S(f, \tilde{\tau}, E) - s(f, \tilde{\tau}, E) \leqslant S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Рассмотрим какое-либо множество $A \in \tilde{\tau}$. Так как разбиение $\tilde{\tau}$ мельче разбиения τ_0, то должно быть либо $A \subset E_0$, либо $A \subset E_1$ (см. п. 1.1, предл. 1). В первом случае, поскольку $\mu E_0 = 0$, будет и $\mu A = 0$, так что

$$m(f, A)\mu A = M(f, A)\mu A = 0. \tag{5}$$

Если же $A \subset E_1$, то, как и в первой половине доказательства,

$$m(f, A) = m(g, A), \quad M(f, A) = M(g, A). \tag{6}$$

Введем систему τ_1 множеств разбиения $\tilde{\tau}$, содержащихся в множестве $E_1 : \tau_1 = \left\{A \in \tilde{\tau} : A \subset E_1\right\}$. Согласно сказанному в п. 1.1 (предл. 2), τ_1 представляет собой разбиение множества E_1.

Так как $\tilde{\tau}$ — допустимое разбиение множества E, то семейства $\{M(f, A) \cdot \mu A\}$ $(A \in \tilde{\tau})$ и $\{m(f, A) \cdot \mu A\}$ $(A \in \tilde{\tau})$ суммируемы. Следовательно, в силу (6) будут суммируемы и семейства $\{M(g, A) \mu A\}$ $(A \in \tau_1)$; $\{m(g, A) \mu A\}$ $(A \in \tau_1)$ (см. д. 2, п. 2), а это означает допустимость разбиения τ_1. Учитывая еще равенства (5) (для функции f), будем, кроме того, иметь

$$S(f, \tilde{\tau}, E) = \sum_{A \in \tilde{\tau}} M(f, A) \mu A = \sum_{A \in \tau_1} M(g, A) \mu A +$$

$$+ \sum_{A \in \tilde{\tau} \setminus \tau} M(f, A) \mu A = \sum_{A \in \tau_1} M(g, A) \mu A = S(g, \tau_1, E_1)$$

и, аналогично, $s(f, \tilde{\tau}, E) = s(g, \tau_1, E_1)$. Таким образом, ввиду (4), $S(g, \tau_1, E_1) - s(g, \tau_1, E_1) \leqslant \varepsilon$, откуда и вытекает суммируемость функции g.

Равенство $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_{E_1} g d\mu$ получается отсюда на основании доказанного в первой части п. в) (впрочем, не сложнее и непосредственное доказательство).

Теорема доказана.

Определение 2. Пусть f и g — функции, заданные по крайней мере на множестве E $(E \subset R^\nu)$. Если функции f и g принимают равные значения в почти всех точках множества E, т. е. если существует множество $E_0 \subset E$, такое, что $\mu E_0 = 0$ и $f(x) = g(x)$ при всех $x \in E \setminus E_0$, то говорят, что функции f и g эквивалентны на E. Обозначаться это обстоятельство будет так: $f \sim g$ (на E).

Доказанная теорема имеет важное следствие.

Следствие. *Если f_1 и f_2 — функции, эквивалентные на множестве $E (E \in \mathfrak{M})$, то суммируемость одной из них на множестве E влечет суммируемость другой на множестве E и равенство $\int\limits_E f_1 d\mu = \int\limits_E f_2 d\mu$.*

Доказательство. Из определения эквивалентности вытекает, что существует множество $E_0 \subset E$, такое, что $\mu E_0 = 0$ и $f_1(x) = f_2(x)$ при всех $x \in E \setminus E_0$.

Предположим, что функция f_1 суммируема на множестве E. Полагая в п. в) теоремы $f = f_1$, $g = f_1|_{E \setminus E_0}$, получим, что f_1 суммируема на множестве $E \setminus E_0$, причем $\int\limits_E f_1 d\mu = \int\limits_{E \setminus E_0} f_1 d\mu$.

Применяя опять утверждение п. в), беря на этот раз в роли f функцию f_2, а в качестве g — функцию $f_1|_{E\setminus E_0}$, убедимся в суммируемости на множестве E функции f_2. При этом $\int\limits_E f_2 d\mu = \int\limits_{E\setminus E_0} f_1 d\mu$, что вместе с предыдущим приводит к равенству $\int\limits_E f_2 d\mu = \int\limits_E f_1 d\mu$.

Пункт в) только что доказанной теоремы позволяет дать определение суммируемости и интеграла для функций, заданных не всюду, а лишь почти всюду на множестве.

Определение 3. Пусть функция f задана по крайней мере на множестве $E_1 \in \mathfrak{M}$ и пусть $E \in \mathfrak{M}$, $E \supset E_1$, $\mu(E \setminus E_1) = 0$. Тогда мы будем говорить, что функция f задана почти везде на множестве E.

Таким образом, если функция f задана почти везде на множестве E, то E не обязано содержаться в множестве задания этой функции.

Определение 4. Мы будем говорить, что функция f, заданная почти везде на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$, суммируема на этом множестве по мере μ, если функция f суммируема на множестве E_1 (см. определение 3) по мере μ (в смысле определения 1, п. 1.5), а интегралом от функции f по множеству E будем называть число $\int\limits_{E_1} f d\mu$. Множество всех функций, суммируемых на множестве E по мере μ, мы будем обозначать символом $L(E, \mu)$.

Определение 4 корректно. Во-первых, в том случае, когда множество E содержится в множестве задания функции f, мы приходим к прежнему определению интеграла; во-вторых, определение 4 лишь по видимости зависит от выбора множества E_1. В самом деле, если E_2 — какое-нибудь другое множество, содержащееся в множестве задания функции f и такое, что $E_2 \subset E$, $\mu(E \setminus E_2) = 0$, то в силу пункта в) теоремы интегралы $\int\limits_{E_1} f d\mu$ и $\int\limits_{E_2} f d\mu$ существуют или не существуют одновременно и если существуют, то равны друг другу.

Понимая интеграл от функции f по множеству E в определенном выше смысле, мы будем использовать для его обозначения прежний символ $\int\limits_E f d\mu$, поскольку в случае, когда область определения функции f содержит не только множество E_1, но и множество E, интегралы $\int\limits_{E_1} f d\mu$ и $\int\limits_E f d\mu$ в силу пункта в) теоремы существуют одновременно и, когда существуют, равны друг другу.

2.2. В следующей теореме выясняется, какие заключения можно сделать о суммируемости и интеграле линейной комбинации суммируемых функций, модуля суммируемой функции, и даются простые оценки интеграла.

Определение 1. Пусть f — функция, заданная на множестве E. Рассмотрим функции f^+ и f^-, заданные на множестве E равенствами

$$f^+(x) = \max\{f(x),\ 0\},\ f^-(x) = \max\{-f(x),\ 0\}\quad (x \in E).$$

Первая из них называется *положительной*, а вторая — *отрицательной частью функции* f.

Легко видеть, что $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ при всех $x \in E$ и что $f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$, $f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$, если $x \in E$ и правые части этих равенств имеют смысл.

Теорема 2 (2.II). а) *Пусть* f_1 и $f_2 \in L(E, \mu)$. *Тогда* $f_1 + f_2 \in L(E, \mu)$ *и* $\int\limits_E (f_1 + f_2)\,d\mu = \int\limits_E f_1\,d\mu + \int\limits_E f_2\,d\mu$.

б) *Пусть* $f \in L(E, \mu)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда* $\alpha f \in L(E, \mu)$ *и* $\int\limits_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int\limits_E f\,d\mu$.

в) *Если* $f \in L(E, \mu)$ *и* $k \leqslant f(x) \leqslant K$ *при почти всех* $x \in E$, *то* $k \cdot \mu E \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant K \cdot \mu E$.*

г) *Если* $f \in L(E, \mu)$ *и* $f(x) \geqslant 0$ *при почти всех* $x \in E$, *то* $\int\limits_E f\,d\mu \geqslant 0$.

д) *Если* f, $g \in L(E, \mu)$ *и* $f(x) \leqslant g(x)$ *при почти всех* $x \in E$, *то* $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu$.

е) *Если* $f \in L(E, \mu)$, *то* $|f|$, f^+, $f^- \in L(E, \mu)$ *и* $\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu$.**

Доказательство. а) При доказательстве первого утверждения следует иметь в виду сказанное в предыдущем пункте. Сумма $f_1(x) + f_2(x)$ при некоторых $x \in E$ может не иметь смысла, так как одно слагаемое может равняться $+\infty$, а второе $-\infty$. Но эта сумма имеет смысл во всяком случае на множестве $\widetilde{E} = E \setminus \{x \in E : |f_1(x)| = |f_2(x)| = +\infty\}$, т. е. почти везде на E, так как функции f_1 и f_2, будучи суммируемыми на E, принимают бесконечные значения лишь на множестве меры нуль (теорема 1, п. а)). Утверждение п. а) означает,

* Понятно, что это неравенство представляет интерес только в том случае, когда числа $k \cdot \mu E$, $K \cdot \mu E$ конечны.

** Не следует думать, что из суммируемости функции $|f|$ следует суммируемость функции f. Подробнее об этом см. п. 3.1 и 3.8.

таким образом, что функция f_1+f_2, заданная в точках множества $\widetilde{E}$ равенством $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$, суммируема на $\widetilde{E}$ и $\int\limits_{\widetilde{E}}(f_1+f_2)\,d\mu=\int\limits_{\widetilde{E}}f_1\,d\mu+\int\limits_{\widetilde{E}}f_2\,d\mu$.

Сказанное позволяет считать обе функции f_1 и f_2 **конечными** на E (в противном случае множество E мы заменим множеством $\widetilde{E}$).

В этом предположении отметим, что если $e\subset E$ и $x\in e$, то $m(f_1,\ e)+m(f_2,\ e)\leqslant f_1(x)+f_2(x)\leqslant M(f_1,\ e)+M(f_2,\ e)$, так что первая и третья суммы* в этом неравенстве являются соответственно нижней и верхней границами функции f_1+f_2 на множестве e, и потому

$$m(f_1,\ e)+m(f_2,\ e)\leqslant m(f_1+f_2,\ e)\leqslant M(f_1+f_2,\ e)\leqslant$$
$$\leqslant M(f_1,\ e)+M(f_2,e). \qquad (7)$$

Значит,

$$\omega(f_1+f_2,\ e)=M(f_1+f_2,\ e)-m(f_1+f_2,\ e)\leqslant$$
$$\leqslant M(f_1,e)-m(f_1,e)+M(f_2,e)-m(f_2,e)=\omega(f_1,e)+\omega(f_2,e). \qquad (8)$$

Из неравенства (7) сразу следует, что всякое разбиение τ множества E, допустимое для функций f_1 и f_2, допустимо также и для функции $f=f_1+f_2$. Ведь если $\tau\in T(f_1,\ E)$, $\tau\in T(f_2,E)$, то семейства $\{m(f_j,\ e)\,\mu e\}$ $(e\in\tau)$ и $\{M(f_j,\ e)\,\mu e\}$ $(e\in\tau)$ $(j=1,\,2)$ суммируемы. Значит (предл. 2 из д. 2, п. 1), суммируемы и семейства $\{(m(f_1,\ e)+m(f_2,e))\,\mu e\}$, $\{(M(f_1,\ e)+M(f_2,\ e))\,\mu e\}$ $(e\in\tau)$. Из неравенства (7) и предложения 3 из д. 2, п. 4 следует теперь, что оба семейства $\{m(f_1+f_2,\ e)\,\mu e\}$ $(e\in\tau)$ и $\{M(f_1+f_2,\ e)\mu e\}$ $(e\in\tau)$ суммируемы, т. е. что $\tau\in T(f_1+f_2,\ e)$.

Возьмем теперь какое-нибудь положительное число ε и подберем разбиения $\tau_1\in T(f_1,\ E)$ и $\tau_2\in T(f_2,\ E)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{e\in\tau_1}\omega(f_1,\ e)\,\mu e\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\qquad \sum_{e\in\tau_2}\omega(f_2,e)\,\mu e\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (9)$$

Такие разбиения τ_1 и τ_2 существуют, ибо функции f_1 и f_2 суммируемы на множестве E (см. замечание 3 к предл. 2 п. 1.6). Разбиение $\tau=\tau_1\vee\tau_2$ допустимо для f_1 и f_2 (лемма 1 из п.1.3), а потому и для f. Кроме того, в силу неравенства (8)

$$\sum_{e\in\tau}\omega(f_1+f_2,\ e)\,\mu e\leqslant\sum_{e\in\tau}[\omega(f_1,e)+\omega(f_2,\ e)]\,\mu e=$$
$$=\sum_{e\in\tau}\omega(f_1,\ e)\,\mu e+\sum_{e\in\tau}\omega(f_2,\ e)\,\mu e. \qquad (10)$$

---

* Эти суммы имеют смысл, так как ввиду конечности функций f_1 и f_2 на множестве e будет $m(f_1,\ e)\leqslant f_1(x)<+\infty$ $(x\in e)$ и точно так же $m(f_2,\ e)<+\infty$. Аналогично $M(f_1,\ e)$, $M(f_2\ e)>-\infty$.

Из неравенств (9) и (10) следует теперь, что

$$\sum_{e \in \tau} \omega(f_1+f_2,\ e)\mu e \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Итак, для любого положительного числа ε можно подобрать разбиение $\tau \in T(f_1+f_2,\ E)$, такое, что выполнено (11). Значит (теорема 1 (1.II)), функция f_1+f_2 суммируема на множестве E.

Займемся вычислением интеграла $\int\limits_E (f_1+f_2)\,d\mu$.

Из неравенства (7) следует (следствие 1, пред. 1 из д. 2, п. 4), что

$$\begin{gathered} s(f_1,\ \tau,\ E)+s(f_2,\ \tau,\ E) \leqslant s(f_1+f_2,\ \tau,\ E) \leqslant \\ \leqslant S(f_1+f_2,\ \tau,\ E) \leqslant S(f_1,\ \tau,\ E)+S(f_2,\ \tau,\ E), \end{gathered} \tag{12}$$

а из неравенства (6) (п. 1.5) — что

$$s(f_1+f_2,\ \tau,\ E) \leqslant \int\limits_E (f_1+f_2)\,d\mu \leqslant S(f_1+f_2,\ \tau,\ E) \tag{13}$$

и

$$\begin{gathered} s(f_1,\ \tau,\ E)+s(f_2,\ \tau,\ E) \leqslant \int\limits_E f_1 d\mu + \int\limits_E f_2 d\mu \leqslant \\ \leqslant S(f_1,\ \tau,\ E)+S(f_2,\ \tau,\ E), \end{gathered} \tag{14}$$

каково бы ни было разбиение τ множества E, допустимое для функций f_1 и f_2 (и, как мы видели, тем самым допустимое и для f).

Сопоставляя неравенства (12), (13) и (14), мы убеждаемся в том, что оба числа $\int\limits_E (f_1+f_2)\,d\mu$ и $\int\limits_E f_1 d\mu + \int\limits_E f_2 d\mu$ содержатся в промежутке

$$[s(f_1,\ \tau,\ E)+s(f_2,\ \tau,\ E),\ S(f_1,\ \tau,\ E)+S(f_2,\ \tau,\ E)],$$

каково бы ни было разбиение $\tau \in T(f_1,\ E) \cap T(f_2,\ E)$.

Возьмем снова какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ и разбиение $\tau \in T(f_1,\ E) \cap T(f_2,\ E)$, удовлетворяющее условиям (9). Тогда (см. (8)) длина упомянутого промежутка не превзойдет

$$\sum_{e \in \tau} \omega(f_1,\ e)\mu e + \sum_{e \in \tau} \omega(f_2,\ e)\mu e \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Поэтому при любом $\varepsilon > 0$

$$\left| \int\limits_E (f_1+f_2)\,d\mu - \left(\int\limits_E f_1 d\mu + \int\limits_E f_2 d\mu \right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Итак,

$$\int\limits_E (f_1+f_2)\,d\mu = \int\limits_E f_1 d\mu + \int\limits_E f_2 d\mu, \tag{15}$$

и утверждение а) полностью доказано.

б) Как и в п. а), можно считать, что функция f задана на множестве E (а не только почти на всем E).

Рассмотрим произвольное не пустое множество $e (e \subset E)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
M(\alpha f, e) &= \begin{cases} \alpha m(f, e), & \text{если } \alpha < 0, \\ \alpha M(f, e), & \text{если } \alpha \geqslant 0, \end{cases} \\
m(\alpha f, e) &= \begin{cases} \alpha M(f, e), & \text{если } \alpha < 0, \\ \alpha m(f, e), & \text{если } \alpha \geqslant 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Докажем, например, первое из этих соотношений для случая $\alpha < 0$. Какое бы $x \in e$ ни взять, $f(x) \leqslant M(f, e)$. Следовательно, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \geqslant \alpha M(f, e)$ (ведь $\alpha < 0$!). Поэтому $m(\alpha f, e) \geqslant \alpha M(f, e)$. С другой стороны, $\alpha f(x) = (\alpha f)(x) \geqslant$ $\geqslant m(\alpha f; e)$ $(x \in e)$, так что $f(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} m(\alpha f; e)$ $(x \in e)$ и, стало быть, $M(f; e) \leqslant \frac{1}{\alpha} m(\alpha f; e)$, или, что то же самое, $\alpha M(f, e) \geqslant$ $\geqslant m(\alpha f; e)$. Вместе с полученным ранее это приводит к искомому равенству.

На основании (16) можем далее написать

$$
\omega(\alpha f, e) = M(\alpha f, e) - m(\alpha f, e) = \begin{cases} \alpha M(f, e) - \alpha m(f, e) & (\alpha \geqslant 0), \\ \alpha m(f, e) - \alpha M(f, e) & (\alpha < 0), \end{cases}
$$

т. е.

$$
\omega(\alpha f, e) = |\alpha| \omega(f, e).^{*} \tag{17}
$$

Возьмем теперь число $\varepsilon > 0$ и подберем такое разбиение $\tau \in T(f, e)$, чтобы было

$$
S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) = \sum_{A \in \tau} \omega(f, A) \mu A \leqslant \varepsilon. \tag{18}
$$

Вследствие (16) члены семейств $\{M(\alpha f) \mu A\}$ $(A \in \tau)$ и $\{m(\alpha f, A) \mu A\}$ $(A \in \tau)$ только множителем α отличаются от соответствующих членов семейств $\{M(f, A) \mu A\}$ $(A \in \tau)$ и $\{m(f, A) \mu A\}$ $(A \in \tau)$, а так как последние семейства суммируемы, то такими же будут и первые два. Но это означает допустимость разбиения τ по отношению к функции αf. Таким образом, $\tau \in T(\alpha f, E)$.

Далее, отправляясь от (17), будем иметь (в силу (18))

$$
\begin{aligned}
S(\alpha f, \tau, E) - s(\alpha f, \tau, E) &= \sum_{A \in \tau} \omega(\alpha f, A) \mu A = \\
&= |\alpha| \sum_{A \in \tau} \omega(f, A) \cdot \mu A \leqslant |\alpha| \varepsilon,
\end{aligned} \tag{19}
$$

что ввиду произвольности ε позволяет заключить о суммируемости функции αf на множестве E.

* В особом случае, когда, скажем, $M(f, e) = m(f, e) = +\infty$, т. е. когда все значения функции f на множестве e равны $+\infty$, приведенный вывод формулы (17) не корректен. Однако тогда $\omega(f, e) = 0$, и, как легко видеть, также и $\omega(\alpha f, e) = 0$, так что равенство (17) все же имеет место.

Равенство $\int\limits_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int\limits_E f\,d\mu$ может быть теперь доказано по образцу п. а).

Предположим для определенности, что $\alpha \geqslant 0$. Из равенств (16) следует, что

$$\begin{aligned} S(\alpha f, \tau, E) &= \alpha S(f, \tau, E), \\ s(\alpha f, \tau, E) &= \alpha s(f, \tau, E), \end{aligned} \tag{20}$$

каково бы ни было разбиение $\tau \in T(f, E)$. Кроме того, согласно неравенству (6) из п. 1.5,

$$\begin{aligned} s(\alpha f, \tau, E) &\leqslant \int\limits_E \alpha f\,d\mu \leqslant S(\alpha f, \tau, E), \\ \alpha s(f, \tau, E) &\leqslant \alpha \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \alpha S(f, \tau, E). \end{aligned} \tag{21}$$

Значит, числа $\int\limits_E \alpha f\,d\mu$ и $\alpha \int\limits_E f\,d\mu$ содержатся в промежутке $[\alpha s(f, \tau, E), \alpha S(f, \tau, E)]$. Длина этого промежутка не превосходит числа $\alpha\varepsilon$, если разбиение τ удовлетворяет условию (19). Поэтому

$$\left| \int\limits_E \alpha f\,d\mu - \alpha \int\limits_E f\,d\mu \right| \leqslant \alpha\varepsilon,$$

каково бы ни было положительное число ε. Остальное ясно. В том случае, когда $\alpha < 0$, аналогичные рассуждения быстро приводят к цели; только вместо равенств (20) нужно исходить из следующих равенств:

$$S(\alpha f, \tau, E) = \alpha s(f, \tau, E), \quad s(\alpha f, \tau, E) = \alpha S(f, \tau, E).$$

Утверждение б) доказано.

в) Предположим сначала, что область определения функции f содержит множество E и что $k \leqslant f(x) \leqslant K$ при всех (а не только при почти всех) $x \in E$. Из определения интеграла вытекает, что для любого допустимого по отношению к функции f разбиения τ множества E

$$s(f, \tau) \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant S(f, \tau). \tag{22}$$

Но каково бы ни было множество $A \in \tau$, справедливы оценки

$$k\mu A \leqslant m(f, A)\,\mu A \leqslant M(f, A)\,\mu A \leqslant K\mu A.$$

Следовательно (см. д. 2, п. 4),

$$S(f, \tau, E) = \sum_{A \in \tau} M(f, A)\,\mu A \leqslant \sum_{A \in \tau} K\mu A = K \sum_{A \in \tau} \mu A = K\mu E$$

и, аналогично, $s(f, \tau, E) \geqslant k\mu E$. Подставляя это в (22), получим доказываемое неравенство.

В случае, когда множество задания функции f содержит лишь почти все элементы множества E и неравенство

$$k \leqslant f(x) \leqslant K \tag{23}$$

выполнено лишь при почти всех $x \in E$, рассмотрим множество e, обладающее следующими свойствами: $e \subset E$, разность $\widetilde{E} = E \setminus e$ уже содержится в множестве задания функции f, неравенство (23) выполнено при всех $x \in \widetilde{E}$ и $\mu e = 0$.

По доказанному, $k\mu\widetilde{E} \leqslant \int\limits_{\widetilde{E}} f d\mu \leqslant K\mu\widetilde{E}$. Остается заметить, что $\mu E = \mu\widetilde{E}$ и $\int\limits_{E} f d\mu = \int\limits_{\widetilde{E}} f d\mu$ (см. п. 2.1).

г) В пункте в) нужно положить $k = 0$. При этом $k \cdot \mu E = 0$ (даже если $\mu E = +\infty$).

д) Функция $f - g = f + (-1) \cdot g$, как отмечалось при доказательстве п. а), вообще говоря, не определена на всем множестве E (даже в случае, когда области определения каждой из функций f и g содержат множество E). Однако для тех $x \in E$, для которых имеет смысл разность $f(x) - g(x)$, т. е. (согласно сказанному в начале доказательства) для почти всех $x \in E$ имеет место неравенство $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \geqslant 0$. Поэтому на основании утверждений пунктов а), б), г) теоремы

$$\int\limits_E f d\mu - \int\limits_E g d\mu = \int\limits_E f d\mu + (-1) \int\limits_E g d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E (-1) g d\mu = \\ = \int\limits_E (f - g) d\mu \geqslant 0.$$

е) Как всегда можем считать, что функция f задана по крайней мере на множестве E. В этом предположении докажем сначала суммируемость положительной части f^+.

Пусть непустое множество $e \subset E$. Убедимся в справедливости неравенств

$$M(f^+, e) \leqslant |M(f, e)|, \quad m(f^+, e) \geqslant m(f, e). \tag{24}$$

Если $M(f, e) \geqslant 0$, то $f^+(x) \leqslant M(f, e)$ $(x \in e)$. Значит, $M(f^+, e) = \sup\limits_{x \in e} f^+(x) \leqslant |M(f, e)|$. Будем считать, что $M(f, e) < 0$. Так как в этом случае $f(x) < 0$ $(x \in e)$, то $f^+(x) = 0$ $(x \in e)$. Следовательно, и $M(f^+, e) = 0 \leqslant |M(f, e)|$. Первое из неравенств (24) доказано.

Второе неравенство получается еще проще. Заметив, что f^+—неотрицательная функция, заключаем отсюда, что $m(f^+, e) \geqslant 0$, а это удостоверяет справедливость неравенства в случае, когда $m(f, e) \leqslant 0$. Предполагая же $m(f, e) > 0$, будем иметь $f(x) \geqslant m(f, e) > 0$ $(x \in e)$, т. е. $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ при всех $x \in e$ и, стало быть, $m(f^+, e) = m(f, e)$. Учитывая неравенства (24), получаем следующее соотношение:

$$\omega(f^+, e) \leqslant \omega(f, e). \tag{25}$$

Действительно, когда $M(f, e) \geqslant 0$, вывод очевиден. Если же $M(f,e) \leqslant 0$, то, как было указано, в этом случае оказывается $f^+(x)=0$ $(x \in e)$, так что $\omega(f^+, e)=0$, и (25) по-прежнему выполняется. *

Возьмем теперь число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такое допустимое для функции f разбиение τ множества E, что

$$S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{A \in \tau} \omega(f, A)\,\mu A \leqslant \varepsilon. \tag{26}$$

Семейство $\{M(f, A)\,\mu A\}$ $(A \in \tau)$ суммируемо, и поэтому (предл. 2 (д. 2, п. 2)) $\sum\limits_{A \in \tau} |M(f, A)\,\mu A| < +\infty$. Но ввиду неотрицательности функции f^+ и в силу первого из неравенств (24) можем написать

$$0 \leqslant \sum_{A \in \tau} m(f^+, A)\,\mu A \leqslant \sum_{A \in \tau} M(f^+, A)\,\mu A \leqslant \sum_{A \in \tau} |M(f, A)\,\mu A| < +\infty,$$

так что оказываются суммируемыми семейства $\{m(f^+, A)\,\mu A\}$ $(A \in \tau)$ и $\{M(f^+, A)\,\mu A\}$ $(A \in \tau)$. Иначе говоря, разбиение τ оказывается допустимым для функции f^+. Согласно (25) и (26), имеем далее

$$S(f^+, \tau) - s(f^+, \tau) = \sum_{A \in \tau} \omega(f^+, A)\,\mu A \leqslant \sum_{A \in \tau} \omega(f, A)\,\mu A \leqslant \varepsilon,$$

и суммируемость функции f^+ доказана.

Суммируемость функции f^- вытекает из того, что, как очевидно, $f^- = (-f)^+$, а функция $(-f)$ по п. б) теоремы суммируема.

Учитывая, наконец, соотношение $|f| = f^+ + f^-$, с помощью п. а) заключаем о суммируемости функции $|f|$.

Что касается неравенства $\left|\int\limits_E f d\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f|\, d\mu$, то по пунктам а), б) и в) $\left|\int\limits_E f d\mu\right| = \left|\int\limits_E (f^+ - f^-)\, d\mu\right| = \left|\int\limits_E f^+ d\mu - \int\limits_E f^- d\mu\right| \leqslant \int\limits_E f^+ d\mu + \int\limits_E f^- d\mu = \int\limits_E (f^+ + f^-)\, d\mu = \int\limits_E |f|\, d\mu.$

Теорема полностью доказана.

Разумеется, в утверждении а) только что доказанной теоремы можно было бы говорить не о двух, а о любом конечном числе слагаемых. Заметим еще, что из утверждений а) и б) вытекает суммируемость разности двух суммируемых на E функций f_1 и f_2 и равенство

$$\int\limits_E (f_1 - f_2)\, d\mu = \int\limits_E f_1 d\mu - \int\limits_E f_2 d\mu.$$

---

* Мы не останавливаемся здесь на особых случаях, когда $M(f, e) = m(f, e) = \pm\infty$. Предоставляем их читателю.

2.3. В предыдущем пункте мы рассматривали интеграл по фиксированному измеримому множеству и интересовались, какова зависимость интеграла от подынтегральной функции. Теперь мы зафиксируем подынтегральную функцию и будем изучать зависимость интеграла от множества, по которому производится интегрирование.

Определение 1. Предположим, что E — измеримое множество, т. е. что $E \in \mathfrak{M}$. Символом $\mathfrak{M}_E$ мы будем обозначать систему всех измеримых подмножеств множества E, т. е.

$$\mathfrak{M}_E = \{A \in \mathfrak{M} : A \subset E\}.$$

Легко видеть, что система $\mathfrak{M}_E$ есть σ-алгебра подмножеств множества E.

Определение 2. Пусть μ — мера, заданная на некоторой σ-алгебре L подмножеств множества X, а ν — функция множества, заданная на той же σ-алгебре L. Говорят, что функция ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|\nu(A)| \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было множество A, удовлетворяющее следующим условиям:

$$A \in L, \quad \mu A \leqslant \delta.$$

Теорема 3 (2.II). *Предположим, что f — функция, суммируемая на измеримом множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) относительно меры μ и что $f(x) \geqslant 0$ при почти всех $x \in E$. Тогда*

а) *функция f суммируема на каждом измеримом подмножестве множества E: $f \in L(B, \mu)$, каково бы ни было множество $B \in \mathfrak{M}_E$;*

б) *если $\{C_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — не более чем счетное семейство попарно непересекающихся подмножеств множества E, то*

$$\sum_{\xi \in \Xi} \int_{C_\xi} f d\mu = \int_{\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} C_\xi} f d\mu;$$

в) *каково бы ни было положительное число ε, существует положительное число δ, такое, что*

$$\int_A f d\mu \leqslant \varepsilon$$

при любом множестве $A \in \mathfrak{M}_E$, таком, что $\mu A \leqslant \delta$.

Утверждения а), б) и в) можно сформулировать и так: функция λ, сопоставляющая любому множеству $A \in \mathfrak{M}_E$ число $\int_A f d\mu$, есть конечная мера, заданная на $\mathfrak{M}_E$ и абсолютно непрерывная относительно меры μ.

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{M}_E$. Проверим, что $f \in L(B, \mu)$ (не умаляя общности, можно считать, что функция f задана по крайней мере на множестве B). Взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, найдем $\tau' \in T(f, E)$ так, чтобы $\sum\limits_{e \in \tau'} \omega(f, e)\mu e \leqslant \varepsilon$. Положим $\tilde{\tau} = \{B, E \setminus B\}$, $\tau = \tau' \vee \tilde{\tau}$. Тогда $\tau \in T(f, E)$ и $\sum\limits_{e \in \tau} \omega(f, e)\mu e \leqslant \varepsilon$. Кроме того, $\sum\limits_{e \in \tau_B} M(f, e)\mu e \leqslant \sum\limits_{e \in \tau} M(f, e)\mu e < < +\infty$, где $\tau_B = \{e \in \tau : e \subset B\}$ (то, что τ_B — разбиение множества B, было доказано ранее). Тем самым доказано включение $\tau_B \in T(f, B)$, так как $0 \leqslant m(f, e) \leqslant M(f, e)$ при всех $e \in \tau$ (в силу неотрицательности функции f). Кроме того, $\sum\limits_{e \in \tau_B} \omega(f, e)\mu e \leqslant \sum\limits_{e \in \tau} \omega(f, e)\mu e \leqslant \varepsilon$. Значит, функция f суммируема на множестве B по мере μ, и имеет смысл говорить о конечной функции λ, описанной в формулировке теоремы. Отметим, что $\lambda(B) \geqslant 0$ при всех $B \in \mathfrak{M}_E$ (см. п. г) теоремы 2). Проверим, что функция λ счетно-аддитивна (см. гл. I, п. 2.3).

Пусть $\{C_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство попарно непересекающихся измеримых подмножеств множества E. Положим $C = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} C_\xi$. Требуется доказать справедливость равенства

$$\lambda C = \sum_{\xi \in \Xi} \lambda C_\xi. \tag{27}$$

Понятно, что при этом можно считать, что среди множеств C_ξ $(\xi \in \Xi)$ нет пустого. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и подберем такое допустимое разбиение τ' множества C, чтобы $S(f, \tau', E) - s(f, \tau', E) \leqslant \varepsilon$. Обозначим далее через τ'' систему всех множеств семейства $\{C_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Поскольку эти множества не имеют одно с другим общих элементов, а объединение их совпадает с C, то легко видеть, что τ'' — разбиение множества C. Введем, наконец, разбиение $\tau = \tau' \vee \tau''$. Так как оно мельче разбиения τ', то в силу леммы 1 из 1.3 τ также допустимо, причем

$$S(f, \tau, E) - s(f, \tau, E) \leqslant \varepsilon. \tag{28}$$

Рассмотрим какой-нибудь элемент $\xi \in \Xi$. Пусть

$$\tau_\xi = \{A \in \tau : A \subset C_\xi\}.$$

Ввиду того, что множество C_ξ входит в разбиение τ'', которое крупнее τ, система τ_ξ является разбиением множества C_ξ (предл. 2, п. 1.1), причем, как вытекает из рассуждений первой части доказательства, допустимым. Считая, что среди множеств, составляющих разбиение τ, нет пустого (см. п. 1.3), видим, что согласно предл. 3 из п. 1.1 системы τ_ξ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} \tau_\xi = \tau$.

Вследствие ассоциативности суммы (д. 2, п. 3)

$$S(f, \tau, C)=\sum_{A\in\tau} M(f, A)\mu A=\sum_{\xi\in\Xi}\left(\sum_{A\in\tau_\xi} M(f, A)\mu A\right)=$$
$$=\sum_{\xi\in\Xi} S(f, \tau_\xi, E_\xi) \tag{29}$$

и аналогично

$$s(f, \tau, C)=\sum_{\xi\in\Xi} s(f, \tau_\xi, C_\xi). \tag{30}$$

Непосредственно из определения интеграла вытекают неравенства

$$s(f, \tau, C)\leqslant \int_C f d\mu=\lambda C\leqslant S(f, \tau, C),$$
$$s(f, \tau_\xi, C_\xi)\leqslant \lambda C_\xi=\int_{E_\xi} f d\mu\leqslant S(f, \tau_\xi, C_\xi) \quad (\xi\in\Xi). \tag{31}$$

Учитывая неотрицательность функции λ, которая обеспечивает существование суммы $\sum\limits_{\xi\in\Xi}\lambda C_\xi$ (предл. 1, д. 2, п. 4), получаем, следовательно, на основании (29), (30) и (31)

$$s(f, \tau, C)=\sum_{\xi\in\Xi} s(f, \tau_\xi, C_\xi)\leqslant\sum_{\xi\in\Xi}\lambda C_\xi\leqslant\sum_{\xi\in\Xi} S(f, \tau_\xi, C_\xi)=S(f, \tau, C).$$

Сравнивая это с (31) (первое неравенство), находим

$$\left|\lambda C-\sum_{\xi\in\Xi}\lambda C_\xi\right|\leqslant S(f, \tau, C)-s(f, \tau, C),$$

т. е. в силу (28) $\left|\lambda C-\sum\limits_{\xi\in\Xi}\lambda C_\xi\right|\leqslant\varepsilon$, что ввиду произвольности ε приводит к равенству (27).

Итак, доказано, что функция λ — неотрицательна, счетно-аддитивна, конечна и, тем самым, σ-конечна, т. е. является мерой (см. гл. I, п. 2.4).

Проверим теперь, что функция λ абсолютно непрерывна. Для этого рассмотрим какое-нибудь разбиение τ множества E, допустимое для функции f: $\tau\in T(f, E)$, и какое-нибудь положительное число ε. Поскольку семейство $\{M(f, C)\mu C\}$ $(C\in\tau)$ суммируемо, то найдется конечное множество $\tilde\tau$ такое, что $\tilde\tau\subset\tau$ и $\sum\limits_{C\in\tilde\tau} M(f, C)\mu C\geqslant\sum\limits_{C\in\tau} M(f, C)\mu C-\frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что тогда $\sum\limits_{C\in\tau\setminus\tilde\tau} M(f, C)\mu C\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, так как

$$\sum_{C\in\tau\setminus\tilde\tau} M(f, C)\mu C=\sum_{C\in\tau} M(f, C)\mu C-\sum_{C\in\tilde\tau} M(f, C)\mu C.$$

Пусть τ^* — подмножество множества $\tilde{\tau}$ (очевидно, конечное), состоящее из всех элементов $C \in \tilde{\tau}$, таких, что $M(f, C) < +\infty$. Выберем столь малое положительное число δ, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \cdot \max_{C \in \tau^*} M(f, C) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Проверим, что если множество A принадлежит системе $\mathfrak{M}_E$ и $\mu A \leqslant \delta$, то $\int\limits_A f d\mu \leqslant \varepsilon$, т. е. $\lambda A \leqslant \varepsilon$. Для этого, вводя обозначение $\widetilde{B} = \bigcup\limits_{C \in \tilde{\tau}} C$, заметим, что при любом $A \in \mathfrak{M}_E$

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_{A \cap \widetilde{B}} f d\mu + \int\limits_{A \setminus \widetilde{B}} f d\mu = \sum_{C \in \tilde{\tau}} \int\limits_{C \cap A} f d\mu + \sum_{C \in \tau \setminus \tilde{\tau}} \int\limits_{C \cap A} f d\mu. \tag{32}$$

Воспользуемся тем, что $f(x) \leqslant M(f, C)$, если $x \in C$:

$$\sum_{C \in \tau \setminus \tilde{\tau}} \int\limits_{C \cap A} f d\mu \leqslant \sum_{C \in \tau \setminus \tilde{\tau}} M(f, C) \mu(C \cap A)$$

(см. утверждение в) теоремы 2). Ввиду монотонности меры μ

$$\mu(C \cap A) \leqslant \mu C$$

при всех $C \in \tau$, так что

$$\sum_{C \in \tau \setminus \tilde{\tau}} \int\limits_{C \cap A} f d\mu \leqslant \sum_{C \in \tau \setminus \tilde{\tau}} M(f, C) \mu C \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{33}$$

в силу выбора множества $\tilde{\tau}$.

Ясно, что при любом $A \in \mathfrak{M}_E$

$$\sum_{C \in \tilde{\tau}} \int\limits_{C \cap A} f d\mu = \sum_{C \in \tau^*} \int\limits_{C \cap A} f d\mu, \tag{34}$$

так как $\int\limits_{C \cap A} f d\mu$ при $C \in \tilde{\tau} \setminus \tau^*$. Действительно, если $C \in \tilde{\tau} \setminus \tau^*$, то $M(f, C) = +\infty$ и, значит, $\mu C = 0$. Предположим теперь, что $A \in \mathfrak{M}_E$ и $\mu A \leqslant \delta$. Тогда

$$\sum_{C \in \tau^*} \int\limits_{C \cap A} f d\mu \leqslant \sum_{C \in \tau^*} M(f, C) \mu(C \cap A) \leqslant \max_{C \in \tau^*} M(f, C) \sum_{C \in \tau^*} \mu(C \cap A) =$$

$$= \left(\max_{C \in \tau^*} M(f, C)\right) \mu\left(\bigcup_{C \in \tau^*} (C \cap A)\right) = \left(\max_{C \in \tau^*} M(f, C)\right) \mu\left(A \cap \bigcup_{C \in \tau^*} C\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{C \in \tau^*} M(f, C) \mu A \leqslant \max_{C \in \tau^*} M(f, C) \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35}$$

Учитывая оценки (33), (34) и (35) и подставляя их в (32), получаем

$$\lambda A = \int\limits_A f d\mu \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad A \in \mathfrak{M}_E \ \text{и} \ \mu A \leqslant \delta.$$

Итак, для любого числа $\varepsilon > 0$ мы сумели найти число $\delta > 0$, обладающее свойством, описанным в п. в) формулировки теоремы.

Абсолютная непрерывность функции λ (а с ней и теорема) доказана.

Следствие 1. *Пусть функция f — такая же, как в теореме, и пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая (или убывающая) последовательность множеств, являющихся элементами $\mathfrak{M}_E$; пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ $\left(\text{или, соответственно, } B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right)$. Тогда $\int\limits_B f d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu$.*

Доказательство. Утверждение следствия — известное свойство конечных счетно-аддитивных функций (теорема 3 (2.I)).

Следствие 2. *Пусть функция f такая же, как в теореме, и пусть $B_0 \subset B_1$ (B_0, $B_1 \in \mathfrak{M}_E$). Тогда $\int\limits_{B_0} f d\mu \leqslant \int\limits_{B_1} f d\mu$.*

Доказательство. Утверждение следствия — это иная форма записи монотонности меры λ, о которой идет речь в теореме (теорема 2, п. а)).

Следствие 3. *Пусть $f \in L(E, \mu)$. Тогда $f \in L(B, \mu)$, каково бы ни было множество $B \in \mathfrak{M}_E$. Функция множества λ, заданная на $\mathfrak{M}_E$ равенством*

$$\lambda(B) = \int\limits_B f d\mu \quad (B \in \mathfrak{M}_E),$$

конечна, счетно-аддитивна и абсолютно непрерывна относительно меры μ. Для функции f справедливо утверждение следствия 1.

Доказательство. $f = f^+ - f^-$, функции f^+ и f^- неотрицательны и суммируемы на E (см. теорему 2). Поэтому $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, где $\lambda^+(B) = \int\limits_B f^+ d\mu$, $\lambda^-(B) = \int\limits_B f^- d\mu$ ($B \in \mathfrak{M}_E$). Остальное ясно.

2.4. Скажем несколько слов по поводу интеграла от непрерывных функций.

Из предыдущего курса анализа читателю должно быть известно (возможно, без достаточного обоснования), что каждой вещественной функции f, область определения которой содержит промежуток Δ числовой прямой, на котором функция f непрерывна, и каждому замкнутому промежутку $[a, b] \subset \Delta$ может быть сопоставлено конечное вещественное число, называемое определенным интегралом функции f по промежутку $[a, b]$ $\left(\text{которое мы временно обозначим символом } \int_a^b f\right)$, так, что соблюдены условия:

1) если интегралы $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ имеют смысл,* причем $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f \geqslant \int_a^b g;$$

2) пусть C — вещественное конечное число; если функция f такова, что $f(x) = C$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f = (b-a) \cdot C;$$

3) если интеграл $\int_a^b f$ имеет смысл и $c \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

В теореме 2 (1.II) мы доказали, что функция f указанного выше вида суммируема по мере Лебега μ_1 на любом промежутке $[a, b] \subset \Delta$. Сопоставляя функции f и промежутку $[a, b] \subset \Delta$ число $\int\limits_{[a, b]} f d\mu_1$, мы, как легко видеть, удовлетворим поставленным выше условиям 1) — 3). В самом деле, условие 1) совпадает с заключением п. д) теоремы 2, условие 2) получается из утверждения п. в) этой же теоремы, если принять $k = K = C$. Для проверки условия 3) надлежит воспользоваться следствием 3 к теореме 3. Ввиду аддитивности интеграла будет

$$\int\limits_{[a, c]} f d\mu_1 = \int\limits_{[a, c)} f d\mu_1 + \int\limits_{\{c\}} f d\mu_1 = \int\limits_{[a, c)} f d\mu_1,$$

так как, очевидно, $\mu_1 \{c\} = 0$ и, значит, по п. б) теоремы 1 $\int\limits_{\{c\}} f d\mu_1 = 0$. Снова, используя аддитивность интеграла, можем написать

$$\int\limits_{[a, b]} f d\mu_1 = \int\limits_{[a, c)} f d\mu_1 + \int\limits_{[c, b]} f d\mu_1 = \int\limits_{[a, c]} f d\mu_1 + \int\limits_{[c, b]} f d\mu_1.$$

---

* Это означает, что функции f и g определены по крайней мере на промежутке $[a, b]$ и непрерывны на нем.

Таким образом, число $\int\limits_{[a,b]} f d\mu_1$ обладает всеми свойствами определенного интеграла. Естественно поставить вопрос: не существует ли другое, отличное от только что описанного, правило соответствия, удовлетворяющее тем же условиям 1)—3)?

Предположим, что каждой функции f указанного в начале пункта вида и каждому промежутку $[a, b]$, на котором функция f непрерывна, сопоставлено число $\mathop{\mathrm{I}}\limits_a^b f$ так, что выполнены условия 1)—3). Докажем, что при этом необходимо $\mathop{\mathrm{I}}\limits_a^b f = \int\limits_{[a,b]} f d\mu_1$, где μ_1, как и раньше, означает меру Лебега (размерности единица).

Возьмем число $\varepsilon > 0$. Функция f, будучи непрерывной на замкнутом промежутке $[a, b]$, по теореме Кантора, равномерно непрерывна на этом промежутке. Это означает, что можно указать такое число $\delta > 0$, что, каков бы ни был промежуток $P \subset [a, b]$, длина которого, т. е. $\mu_1 P$, не превосходит δ, колебание $\omega(f, P)$ не превосходит ε.

Подберем настолько большое натуральное число n, чтобы было $\frac{b-a}{n} \leqslant \delta$, и обозначим $c_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$. Применяя несколько раз условие 3), можем написать

$$\mathop{\mathrm{I}}\limits_a^b f = \mathop{\mathrm{I}}\limits_{c_0}^{c_n} f = \sum_{k=1}^{n} \mathop{\mathrm{I}}\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f. \tag{36}$$

Рассмотрим по отдельности каждое слагаемое правой части этого равенства.

Определим в промежутке $[c_{k-1}, c_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ функции φ_k и ψ_k, полагая

$$\varphi_k(x) = m(f, [c_{k-1}, c_k]), \quad \psi_k(x) = M(f, [c_{k-1}, c_k]) \quad (x \in [c_{k-1}, c_k])$$

(по поводу символов $m(f, [c_{k-1}, c_k])$, $M(f, [c_{k-1}, c_k])$ см. § 1, п. 1.3). Очевидно, $\varphi_k(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_k(x)$ $(x \in [c_{k-1}, c_k])$. Поэтому на основании условий 1) и 2)

$$m(f, [c_{k-1}, c_k]) \frac{b-a}{n} = \mathop{\mathrm{I}}\limits_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi_k \leqslant \mathop{\mathrm{I}}\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f \leqslant \mathop{\mathrm{I}}\limits_{c_{k-1}}^{c_k} \psi_k =$$

$$= M(f, [c_{k-1}, c_k]) \frac{b-a}{n} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, в силу (36)

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m(f, [c_{k-1}, c_k]) \leqslant \mathop{\mathrm{I}}\limits_a^b f \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M(f, [c_{k-1}, c_k]). \tag{37}$$

Введем теперь множества

$$e_k = [c_{k-1}, c_k) \quad (k=1, 2, \ldots, n), \; e_0 = \{b\}. \tag{38}$$

Это измеримые множества, попарно не имеющие общих элементов. Так как объединение $\bigcup_{k=0}^{n} e_k = [c_0, c_n] = [a, b]$, то система множеств (38) служит разбиением промежутка $[a, b]$. Обозначим это разбиение через τ. Поскольку функция f ограничена на промежутке $[a, b]$ по теореме Вейерштрасса и $\mu_1 [a, b] = b - a < +\infty$, то разбиение τ будет допустимым для функции f (см. гл. II, п. 1.3). Составим суммы Дарбу $S(f, \tau, [a, b])$ и $s(f, \tau, [a, b])$. Так как $\mu_1 e_k = c_k - c_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, а $\mu e_0 = 0$, то $s(f, \tau, [a, b]) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m(f, e_k)$; $S(f, \tau, [a, b]) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M(f, e_k)$. Но ввиду непрерывности функции f

$$M(f, e_k) = M(f, [c_{k-1}, c_k]), \; m(f, e_k) = m(f, [c_{k-1}, c_k]) \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{39}$$

Действительно, из неравенства $f(x) \leqslant M(f, e_k)$ $(x \in e_k)$ вытекает $f(c_k) = \lim_{x \to c_k} f(x) \leqslant M(f, e_k)$, так что соотношение $f(x) \leqslant M(f, e_k)$ справедливо для всех $x \in [c_{k-1}, c_k]$ и, значит, $M(f, [c_{k-1}, c_k]) \leqslant M(f, e_k)$. Обратное неравенство очевидно.

Следовательно, в силу (39) будем иметь

$$s(f, \tau, [a, b]) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m(f, [c_{k-1}, c_k]),$$

$$S(f, \tau [a, b]) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f, [c_{k-1}, c_k]).$$

Таким образом, учитывая (37), можем написать

$$s(f, \tau, [a, b]) \leqslant \int_a^b f \leqslant S(f, \tau, [a, b]).$$

Но согласно п. 1.5 также и

$$s(f, \tau, [a, b]) \leqslant \int_{[a, b]} f d\mu_1 \leqslant S(f, \tau, [a, b]).$$

Из последних неравенств получаем

$$\left| \int\limits_{[a,\, b]} f d\mu_1 - \mathrm{I}_a^b f \right| \leqslant S(f,\ \tau,\ [a,\ b]) - s(f,\ \tau,\ [a,\ b]) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \omega(f,\ e_k)\, \mu_1 e_k. \qquad (40)$$

Каждый промежуток e_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет длину $\frac{b-a}{n}$. Значит, $\mu_1 e_k \leqslant \delta$, и в соответствии с выбором δ это позволяет заключить о справедливости неравенства $\omega(f, e_k) \leqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $e_0 = \{b\}$ — одноэлементное множество, то $\omega(f, e_0) = 0 \leqslant \varepsilon$. Тем самым на основании (40) приходим к оценке

$$\left| \int\limits_{[a,\, b]} f d\mu_1 - \mathrm{I}_a^b f \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \mu_1 e_k = \varepsilon \mu_1 [a,\ b] = (b - a)\, \varepsilon,$$

которая ввиду произвольности ε дает равенство $\mathrm{I}_a^b f = \int\limits_{[a,\, b]} f d\mu_1$.

Итак, доказано, что аксиоматически введенный условиями 1) — 3) определенный интеграл $\mathrm{I}_a^b f$ существует и совпадает с интегралом $\int\limits_{[a,\, b]} f d\mu_1$ по мере Лебега. Это обстоятельство делает возможным все факты, доказанные для интеграла $\int\limits_{[a,\, b]} f d\mu_1$, перенести без каких-либо дополнительных рассуждений на определенный интеграл $\mathrm{I}_a^b f$ и, наоборот, все то, что справедливо по отношению к определенному интегралу $\mathrm{I}_a^b f$, верно и для интеграла $\int_a^b f d\mu_1$.

Так, например, в первой части курса анализа было установлено, что любая функция, непрерывная на промежутке $[a, b]$, имеет на этом промежутке первообразную, а определенный интеграл $\mathrm{I}_a^b f$ может быть вычислен с помощью формулы Ньютона—Лейбница как приращение на промежутке $[a, b]$ любой функции F, которая служит для f первообразной:

$$\mathrm{I}_a^b f = F(b) - F(a).$$

Между прочим, эти утверждения могут быть очень легко выведены из свойств 1)—3) интеграла $\int\limits_a^b$. В самом деле, определим на промежутке $[a, b]$ функцию Φ, полагая $\Phi(x) = \int\limits_a^x f$ $(x \in (a, b])$, $\Phi(a) = 0$. Рассмотрим какой-либо $x \in [a, b)$ и число h такое, что $0 < h \leqslant b - x$. Согласно условию 3) (а при $x = a$ непосредственно по определению символа $\Phi(a)$)

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+h} f - \int\limits_a^x f = \int\limits_a^x f + \int\limits_x^{x+h} f - \int\limits_a^x f = \int\limits_x^{x+h} f.$$

Но из условий 1) и 3) вытекает

$$hm(f, [x, x+h]) \leqslant \int\limits_x^{x+h} f \leqslant hM(f, [x, x+h]),$$

что вместе с предыдущим дает

$$m(f, [x, x+h]) \leqslant \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \leqslant M(f, [x, x+h)].$$

Поскольку, очевидно, что $m(f, [x, x+h]) \leqslant f(x) \leqslant M(f, [x, x+h)]$ то

$$\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) \right| \leqslant M(f, [x, x+h]) - m(f, [x, x+h]) = \omega(f, [x, x+h]).$$

Но по непрерывности функции f в точке x (ведь, говоря об определенном интеграле, мы имеем в виду только непрерывные функции) $\lim\limits_{h \to +0} \omega(f, [x, x+h]) = 0$, так что существует предел $\lim\limits_{h \to +0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x)$. Это означает, что в точке x существует производная справа функции Φ, равная $f(x)$.

Рассуждая аналогичным образом, нетрудно убедиться в том, что и производная слева функция Φ в любой точке $x \in [a, b]$ совпадает с $f(x)$.

Таким образом, существует производная (двусторонняя) $\Phi'(x) = f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$. Если же $x = a$ или $x = b$, то равенство $\Phi'(x) = f(x)$ сохраняет силу, если под $\Phi'(x)$ подразумевать соответствующую одностороннюю производную.

Из всего сказанного следует, что в промежутке $[a, b]$ функция Φ является по отношению к f первообразной. Если F — функция, которая в промежутке $[a, b]$ также служит первообразной для f, то, как известно, $F(x) - \Phi(x) = F(a) - \Phi(a) = F(a)$ $(x \in [a, b])$. В частности, полагая $x = b$, получим $\int\limits_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$. Из сказанного в этом пункте вытекает следующая важная теорема.

Теорема 4 (2.II). *Если f — функция, множество задания которой содержит промежуток $[a, b]$ $(a, b \in R)$, на котором f непрерывна, то*

$$\int_a^b f d\mu_1 = F(b) - F(a),$$

где F — какая-нибудь первообразная функции f на промежутке $[a, b]$: $F'(x) = f(x)$ $(x \in [a, b])$.

Доказательство. Как мы видели выше, отображение $f \to \int_a^b f d\mu_1$ обладает всеми свойствами определенного интеграла $\operatorname*{I}_a^b f$, а $\operatorname*{I}_a^b f = F(b) - F(a)$.

Теорема доказана.

Отметим в заключение, что для определенного интеграла $\operatorname*{I}_a^b f$ применяется обычно обозначение $\int_a^b f(x)\,dx$ или $\int_a^b f$. Совпадение числа $\operatorname*{I}_a^b f$ с интегралом Лебега $\int_a^b f d\mu_1$ для функции, непрерывной на промежутке $[a, b]$, делает целесообразным обозначение $\int_a^b f d\mu_1$ для интеграла $\operatorname*{I}_a^b f$. Символ $\int_a^b f d\mu$ применяют и в случае, когда μ — мера, отличная от меры Лебега. Следует, однако, иметь в виду известное неудобство указанного обозначения в таком общем случае, поскольку неясно, какой из промежутков с концами a и b является областью интегрирования. Если $\mu = \mu_1$ — мера Лебега, то это не имеет значения, так как одноэлементное множество при этом имеет меру нуль, и, значит, применимо сказанное в п. 2.1. Если же μ — произвольная мера, то интегралы $\int_{(a, b)} f d\mu$, $\int_{[a, b)} f d\mu$, $\int_{[a, b]} f d\mu$ и $\int_{(a, b]} f d\mu$ все могут оказаться различными и, более того, одни из них могут существовать, а другие — нет.

2.5. Известным дополнением к теореме 3 является следующий факт.

Теорема 5 (2.II). *Пусть функция f задана на множестве $E \in \mathfrak{M}$, $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$ и пусть τ — разбиение множества E. Функция f суммируема на множестве E по мере μ тогда и только тогда, когда f суммируема на множестве e по мере μ при всех $e \in \tau$ и числовое семейство $\left\{\int_e f d\mu\right\}$ $(e \in \tau)$ суммируемо.*

Доказательство. Необходимость была доказана в теореме 3. Докажем достаточность. С этой целью возьмем любое положительное число ε и рассмотрим семейство $\{\varepsilon_e\}$ $(e \in \tau)$ положительных чисел такое, что $\sum\limits_{e \in \tau} \varepsilon_e = \varepsilon$ (д. 2, п. 5). Пользуясь суммируемостью на каждом множестве $e \in \tau$, найдем такое разбиение $\tau_e \in T(f, e)$, что $S(f, \tau_e, e) - s(f, \tau_e, e) \leqslant \varepsilon_e$, или, что то же самое, $\sum\limits_{\tilde{e} \in \tau_e} \omega(f, \tilde{e})\, \mu\tilde{e} \leqslant \varepsilon_e$. Система множеств $\tilde{\tau} = \bigcup\limits_{e \in \tau} \tau_e$ образует, очевидно, разбиение множества E. Проверим, что $\tilde{\tau} \in T(f, E)$:

$$\sum_{\tilde{e} \in \tilde{\tau}} M(f, \tilde{e}) \cdot \mu\tilde{e} = \sum_{e \in \tau} \sum_{\tilde{e} \in \tau_e} M(f, \tilde{e}) \cdot \mu\tilde{e} \leqslant \sum_{e \in \tau} \left(\int_e f d\mu + \varepsilon_e \right) =$$
$$= \sum_{e \in \tau} \int_e f d\mu + \varepsilon < +\infty$$

(здесь мы использовали предл. 6, д. 2, п. 4). Допустимость разбиения $\tilde{\tau}$ для функции f установлена, так как $0 \leqslant m(f, \tilde{e}) \leqslant M(f, \tilde{e})$ $(\tilde{e} \in \tilde{\tau})$ (ср. рассуждения в теореме 3). Кроме того,

$$\sum_{\tilde{e} \in \tilde{\tau}} \omega(f, \tilde{e})\, \mu\tilde{e} = \sum_{e \in \tau} \sum_{\tilde{e} \in \tau_e} \omega(f, \tilde{e})\, \mu\tilde{e} \leqslant \sum_{e \in \tau} \varepsilon_e = \varepsilon.$$

Значит (см. теорему 1 (1.II) в п. 1.6), функция f суммируема на множестве E по мере μ.

Следствие 1. *Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, $E_k \in \mathfrak{M}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, функция f задана на множестве $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, неотрицательна и суммируема на каждом множестве E_k $(k = 1, 2, \ldots)$, то для суммируемости функции f на множестве E необходима и достаточна сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f d\mu$.*

Следствие 2. *Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность множеств, $E_k \in \mathfrak{M}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, функция f задана на множестве $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, неотрицательна и суммируема на каждом множестве E_k $(k = 1, 2, \ldots)$, то для суммируемости f на множестве E необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\left\{ \int\limits_{E_k} f d\mu \right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограничена.*

Доказательство. Необходимость сразу следует из неравенства $\int\limits_{E_k} f d\mu \leqslant \int\limits_{E} f d\mu$.

Докажем достаточность. Представим E в виде объединения $E = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (E_{n+1} \setminus E_n)$, где $E_0 = \Lambda$. Заметим, что

$$\int\limits_{E_{k+1} \setminus E_k} f d\mu = \int\limits_{E_{k+1}} f d\mu - \int\limits_{E_k} f d\mu$$

(субтрактивность меры λ, введенной в теореме 3!). Поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{E_{n+1} \setminus E_n} f d\mu$$

сходится, так как его частные суммы ограничены. Остается применить следствие 1.

Пользуясь теоремой 4, можно в ряде случаев решить вопрос о суммируемости неограниченных функций или функций, заданных на множествах бесконечной меры. Приведем пример.

Пример. Пусть $\mu = \mu_1$—мера Лебега в R^1, $E = (-\infty, +\infty)$ и $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in E)$. Пусть $E_k = [-k, k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Функция f, будучи непрерывной, суммируема на E_k при всех k $(k = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, она неотрицательна, и (по теореме 4) $\int\limits_{E_k} f d\mu_1 = \int\limits_{-k}^{k} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} k \leqslant \pi$ при всех k $(k = 1, 2, \ldots)$. Значит, по следствию 2, $f \in L((-\infty, +\infty), \mu_1)$. Легко вычислить интеграл этой функции, применяя следствие 1 к теореме 3:

$$\int\limits_{(-\infty, +\infty)} f(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int\limits_{-k}^{k} f(x)\, dx = \lim_{k \to +\infty} 2 \operatorname{arctg} k = \pi.$$

Рекомендуем читателю установить, при каких α суммируема на промежутке $[0, 1]$ функция f_α: $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(x \in (0, 1))$.

В теореме 5 и ее следствиях существенно то обстоятельство, что функция f неотрицательна. Пусть, например, $E = (0, +\infty)$, $f(x) = \sin x$ $(x \in (0, +\infty))$, $\mu = \mu_1$ — мера Лебега,

$$E_k = [2(k-1)\pi, 2k\pi) \ (k = 1, 2, \ldots), \ E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Множества E_k попарно не пересекаются, функция f непрерывна и потому суммируема на каждом E_k, $\int\limits_{E_k} f(x)\, dx = 0$ при всех k (это легко следует из теоремы 4), так что ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx$ сходится. Но функция f не суммируема на множестве E. В самом деле, если бы функция f была суммируема, то была бы суммируема и функция $|f|$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|\,dx$ сходился бы. Но ведь $\int\limits_{E_k} |f(x)|\,dx = 4$ при всех k.

2.6. До сих пор мы изучали интеграл от функций, принимающих вещественные значения. Определим теперь интеграл от комплекснозначных функций. Пусть f — комплекснозначная функция, заданная по крайней мере на почти всем множестве E ($E \in \mathfrak{M}$). Мы будем говорить, что функция f суммируема на множестве E по мере μ, если функции $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f \in L(E, \mu)$; при этом интеграл от функции f определяется так:

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re} f\,d\mu + i \int\limits_E \operatorname{Im} f\,d\mu.$$

Для комплекснозначных функций верна теорема 1 (проверка этого совершенно тривиальна). Утверждения а) и б) теоремы 2 также легко переносятся на комплекснозначные функции (в утверждении б) можно говорить теперь об умножении на любое комплексное число α). Утверждения в), г), д) этой теоремы, а также утверждение е) в части, касающейся функций f^+ и f^-, имеют смысл только для вещественных функций. Сложнее обстоит дело с суммируемостью функции $|f|$. То, что говорится по этому поводу в утверждении е) теоремы 2, верно и для комплекснозначных функций, но докажем мы это позже.

§ 3. Измеримые функции

В § 1 этой главы мы нашли необходимое и достаточное условие суммируемости (см. теорему 1 (1.II)). Оно таково: функция f суммируема на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) по мере μ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau \in T(f, E)$, такое, что $\sum\limits_{e \in \tau} \omega(f, e) \cdot \mu e \leqslant \varepsilon$.

Предположим, что f — совершенно произвольная ограниченная вещественная функция, заданная по крайней мере на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) конечной меры ($\mu E < +\infty$). Тогда любое разбиение τ множества E допустимо для f (см. гл. II, п. 1.3). Чтобы добиться выполнения неравенства $\sum\limits_{e \in \tau} \omega(f, e)\,\mu e \leqslant \varepsilon$, можно поступать следующим образом. Разобьем промежуток $(-\infty, +\infty)$ на непересекающиеся полуоткрытые промежутки Δ длины ε (рис. 11, где e_Δ равно объединению шести промежутков e_Δ^j), и пусть $e_\Delta = \{x \in E : f(x) \in \Delta\}$. Множества e_Δ попарно не пересекаются, их объединение равно E, $\omega(f, e_\Delta) \leqslant \varepsilon$. Если множества e_Δ входят в $\mathfrak{M}$, то они образуют разбиение τ множества E, причем это разбиение допустимо, так как функция f ограничена и $\mu E < +\infty$, и выполняется неравенство

$$\sum_{e_\Delta \in \tau} \omega(f, e_\Delta)\, \mu e_\Delta \leqslant \varepsilon \sum_{e_\Delta \in \tau} \mu e_\Delta = \varepsilon \mu E.$$

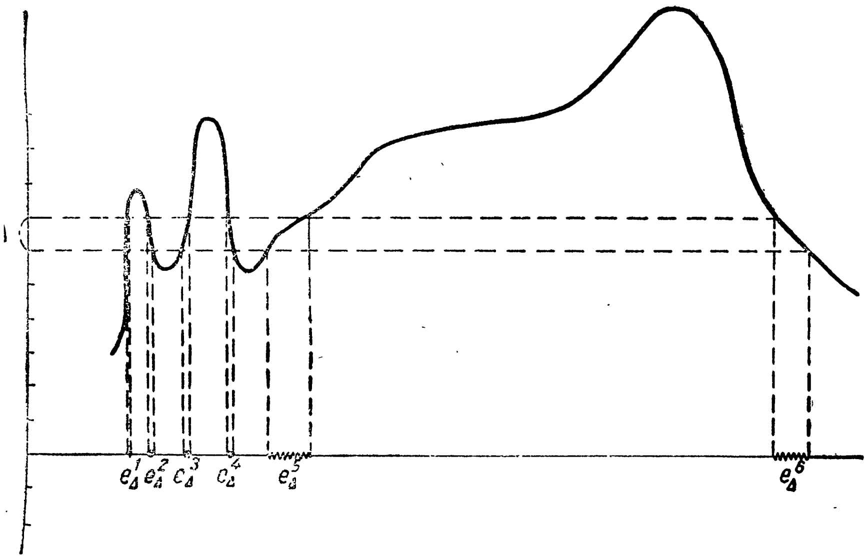

Рис. 11.

Таким образом, изучение суммируемости функций приводит нас к следующему вопросу: что представляет собой класс всех функций f, заданных на множестве $E \in \mathfrak{M}$ и таких, что при любом промежутке Δ множество $\{x \in E : f(x) \in \Delta\}$ входит в $\mathfrak{M}$? Как мы увидим, этот класс функций, называемых измеримыми, тесно связан с классом $L(E, \mu)$. Грубо говоря, суммируемые функции — это не слишком большие измеримые функции. Точный смысл эти слова приобретут в 3.8.

3.1. Определение 1. Пусть $\mathfrak{M}$, как всегда, σ-алгебра подмножеств множества R^ν, $E \in \mathfrak{M}$, вещественная функция f задана по крайней мере на множестве E. Говорят, что функция f *измерима на множестве E* относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}$, если для любого промежутка Δ (замкнутого, открытого, полуоткрытого, конечного или нет)

$$\{x \in E : f(x) \in \Delta\} \in \mathfrak{M}. \qquad (1)$$

Отметим, что свойство измеримости не связано с какой-либо мерой, заданной на $\mathfrak{M}$, а определяется только самой σ-алгеброй $\mathfrak{M}$.

Говоря об измеримых функциях, мы часто будем опускать упоминание о множестве E и о соответствующей σ-алгебре, если это не поведет к недоразумению.

Сделаем несколько замечаний в связи с определением измеримости.

Замечание 1. Мы получили бы равносильное определение измеримости, если бы вместо множеств вида (1) говорили бы о произвольных множествах вида $\{x \in E : f(x) > a\}$, или $\{x \in E : f(x) \geqslant a\}$, или $\{x \in E : f(x) < a\}$, или $\{x \in E : f(x) \leqslant a\}$ $(a \in (-\infty, +\infty))$. Иными словами, в определении измеримости можно ограничиться промежутками Δ любого из четырех типов: $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$.

Доказательство. Пусть, например, при любом вещественном a $(a \in R)$ множество $\{x \in E : f(x) > a\}$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Проверим, что в этом случае функция f измерима. Справедливы следующие равенства:

$$\{x \in E : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \in E : f(x) > a - \frac{1}{p}\right\},$$

$$\{x \in E : f(x) < a\} = E \setminus \{x \in E : f(x) \geqslant a\},$$

$$\{x \in E : f(x) \leqslant a\} = E \setminus \{x \in E : f(x) > a\},$$

$$\{x \in E : a \leqslant f(x) \leqslant b\} = \{x \in E : f(x) \leqslant b\} \cap \{x \in E : f(x) \geqslant a\},$$

при любых a, $b \in (-\infty, +\infty)$, и

$$\{x \in E : f(x) < +\infty\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \leqslant p\}.$$

Пересечение, стоящее в правой части первого равенства, принадлежит $\mathfrak{M}$, так как $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, а по условию $\left\{x \in E : f(x) > a - \frac{1}{p}\right\} \in \mathfrak{M}$. Пользуясь свойствами σ-алгебры, мы теперь видим, что правые части остальных равенств также принадлежат $\mathfrak{M}$. Аналогично устанавливается включение (1) и для других промежутков Δ (открытых, полуоткрытых).

Замечание 2. Если функция f измерима на множестве E, то $\{x \in E,\ f(x) = a\} \in \mathfrak{M}$ при любом $a \in [-\infty, +\infty]$.

Доказательство. Если a — конечное число, то

$$\{x \in E : f(x) = a\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \in E : f(x) \in \left(a - \frac{1}{p},\ a + \frac{1}{p}\right)\right\}.$$

Кроме того,

$$\{x \in E : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > p\},$$

а
$$\{x \in E : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) < -p\}.$$

Замечание 3. Если функция f, заданная на измеримом множестве E, измерима и если множество E_0 измеримо и $E_0 \subset E$, то f измерима и на множестве E_0.

Если τ — разбиение измеримого множества E (см. п. 1.1) и f — функция, измеримая на каждом из множеств $e \in \tau$, то f измерима на E.

Доказательство. Эти утверждения очевидны, так как
$$\{x \in E_0 : f(x) \in \Delta\} = \{x \in E : f(x) \in \Delta\} \cap E_0,$$
$$\{x \in E : f(x) \in \Delta\} = \bigcup_{e \in \tau} \{x \in e : f(x) \in \Delta\}.$$

Замечание 4. Если $E \in \mathfrak{M}$, μ — полная мера, заданная на $\mathfrak{M}$, и $\mu E = 0$, то всякая функция, заданная по крайней мере на множестве E, измерима на этом множестве.

Это утверждение очевидно.

Замечание 5. Предположим, что $E \in \mathfrak{M}$ и что $f \sim g$ на множестве E (см. определение 2 п. 2.1). Если одна из функций f и g измерима на множестве E, то измерима и другая.

Это утверждение вытекает из замечаний 3 и 4.

Определение 1′. Пусть μ — полная мера, заданная на $\mathfrak{M}'$. Предположим, что функция f задана почти везде на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) (см. определение 3 п. 2.1). Мы будем говорить, что функция f измерима на множестве E, если f измерима на множестве E_1, где E_1 — какое-нибудь измеримое множество, содержащееся в множестве задания функции f и такое, что $E_1 \subset E$, $\mu(E \setminus E_1) = 0$.

Легко понять, что это определение корректно, так как безразлично, какое именно множество E_1 мы будем рассматривать.

Рассмотрим теперь примеры измеримых функций.

Пример 1. Пусть f — функция, заданная по крайней мере на замкнутом промежутке $[A, B]$ ($A, B \in R$) и непрерывная на нем, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1$ — σ-алгебра всех подмножеств множества R^1, измеримых по Лебегу. Тогда функция f измерима на промежутке $[A, B]$.

Доказательство сразу следует из замечания 1: легко видеть, что множество $\{x \in [A, B] : f(x) \geqslant a\}$ замкнуто при любом $a \in (-\infty, +\infty)$ и потому измеримо по Лебегу.

Пример 2. Пусть f — ступенчатая функция, заданная на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) (см. определение 1 п. 1.6). Тогда f — измерима на E*.

* Данное нами определение ступенчатых функций не общепринято. Часто ступенчатой функцией на множестве E называют функцию, заданную на E и постоянную на каждом множестве $A \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — произвольная не более чем счетная (иногда систему $\mathfrak{A}$ предполагают конечной) система попарно не

Доказательство. Существует разбиение τ множества E, такое, что функция f постоянна на любом множестве $e \in \tau$, а потому и измерима на каждом таком множестве. Значит, в силу замечания 3, f измерима.

Пример 3. Если функция f задана на множестве $E \in \mathfrak{M}$ и измерима, то функции f^+ и f^- также измеримы.

Доказательство. Если f измерима, то множества

$$E_+ = \{x \in E : f(x) \geqslant 0\}, \quad E_- = \{x \in E : f(x) < 0\}$$

измеримы. Кроме того, $E_+ \cup E_- = E$. Поэтому функция f измерима на E_+ и E_-. Но $f^+(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_+, \\ 0, & x \in E_-. \end{cases}$ Значит, функция f^+ измерима на множествах E_+ и E_-. Поэтому функция f^+ измерима на множестве E. Так же проверяется измеримость функции f^-.

Пример 4. Бывают и неизмеримые функции. Такова, например, функция f, заданная в R^ν следующим образом: $f(x) = -1$, если $x \overline{\in} E$, $f(x) = 1$, если $x \in E$, где $E \overline{\in} \mathfrak{M}$.

Доказательство. Множество $\{x \in R^\nu : f(x) = 1\}$ не принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}$, и потому, в силу замечания 2, функция f неизмерима.

Полезно заметить, что функция $|f|$ в последнем примере измерима, несмотря на неизмеримость функции f. Однако теоремы этого параграфа показывают, что класс измеримых функций чрезвычайно широк, и обычные для анализа операции (например, операция предельного перехода) не выводят за его пределы.

3.2. Теорема 1 (3.II). *Пусть функция f, заданная по крайней мере на множестве $E\,(E \in \mathfrak{M})$, измерима на E. Тогда существует монотонная последовательность $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ ступенчатых функций, заданных на E, такая, что*

$$f(x) = \lim_{p \to \infty} f_p(x)$$

при всех $x \in E$, и если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$, то и $f_p(x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$ и $p \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть p — произвольное натуральное число и пусть $e_p^{(k)} = \left\{x \in E : \frac{k}{2^p} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^p}\right\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Все множества $e_p^{(k)} \in \mathfrak{M}$; присоединяя к ним множества $e_{+\infty} = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ и $e_{-\infty} = \{x \in E : f(x) = -\infty\}$, мы получим разбиение τ_p множества E. Пусть $f_p(x) = \frac{k}{2^p}$, если

пересекающихся (не обязательно измеримых!) множеств, такая, что $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A = E$. При таком определении, вообще говоря, не всякая ступенчатая функция измерима.

$x \in e_p^{(k)}$; $f_p(x) = +\infty$, если $x \in e_{+\infty}$; $f_p(x) = -\infty$, если $x \in e_{-\infty}$. Тогда f_p — ступенчатая функция, заданная на множестве E. Проверим, что $f_p(x) \leqslant f_{p+1}(x)$ при всех $x \in E$ и всех p ($p = 1, 2, \ldots$). Это очевидно, если $x \in e_{+\infty} \cup e_{-\infty}$. Пусть же $x \in e_p^{(k)}$. Так как, очевидно, $e_p^{(k)} = e_{p+1}^{(2k)} \cup e_{p+1}^{(2k+1)}$, то $f_p(x) = \frac{k}{2^p}$, а $f_{p+1}(x) = \frac{2k}{2^{p+1}}$ или $\frac{2k+1}{2^{p+1}}$; и в том и в другом случае $f_p(x) \leqslant f_{p+1}(x)$ (рис. 12; жирные отрезки образуют график функции f_1, подграфик f_2 заштрихован). Кроме того, $f_p(x) = f(x)$ при $x \in e_{+\infty} \cup e_{-\infty}$ и

$$0 \leqslant f(x) - f_p(x) \leqslant \frac{1}{2^p}$$

при всех p ($p = 1, 2, \ldots$) и при всех x, принадлежащих множеству $E \setminus (e_{+\infty} \cup e_{-\infty})$. Значит, $f(x) = \lim\limits_{p \to \infty} f_p(x)$ при всех $x \in E$.

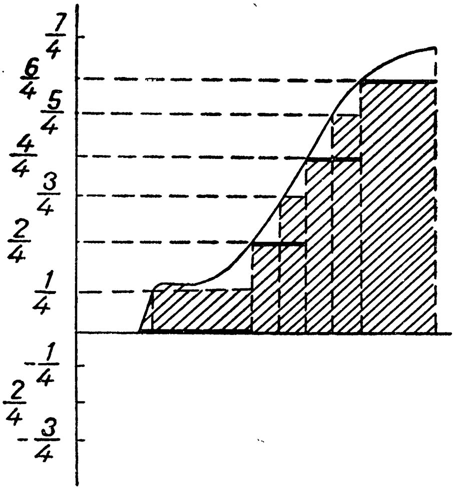

Рис. 12.

Если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$, то $e_p^{(k)} = \Lambda$ при $k < 0$, $e_{-\infty} = \Lambda$. Значит, $f_p(x) \geqslant 0$ ($x \in E$).

Теорема доказана.

Замечание. Построенная в теореме последовательность ступенчатых функций $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ возрастающая:

$$f_p(x) \leqslant f_{p+1}(x) \quad \text{при всех } x \in E \quad \text{и } p \in \mathbf{N}.$$

Легко понять, что существует также и убывающая последовательность $\{\varphi_p\}_{p=1}^{\infty}$ ступенчатых функций, такая, что $\lim\limits_{p \to \infty} \varphi_p(x) = \varphi(x)$ при всех $x \in E$. Для того чтобы построить такую последовательность, достаточно положить $\varphi_p(x) = \frac{k+1}{2^p}$, если $x \in e_p^{(k)}$; $\varphi_p(x) = +\infty$, если $x \in e_{+\infty}$; $\varphi_p(x) = -\infty$, если $x \in e_{-\infty}$ (мы используем обозначения, введенные в доказательстве теоремы).

3.3. Теорема 2 (3.II). *Пусть $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) функций. Тогда функции $\sup\limits_{p \in \mathbf{N}} f_p$, $\inf\limits_{p \in \mathbf{N}} f_p$, $\overline{\lim\limits_{p \to \infty}} f_p$, $\underline{\lim\limits_{p \to \infty}} f_p$ (см. д. 1, п. 4) также измеримы на E.*

Доказательство. Рассмотрим вещественное число a.

Тогда $\{x \in E : \sup\limits_{p \in \mathbf{N}} f_p(x) \leqslant a\} = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \{x \in E : f_p(x) \leqslant a\}$, а так как все множества, стоящие под знаком пересечения, содержатся в $\mathfrak{M}$, то и множество в левой части равенства содержится в $\mathfrak{M}$. Так же доказывается, что $\{x \in E : \inf\limits_{p \in \mathbf{N}} f_p(x) \geqslant a\} \in \mathfrak{M}$ при любом $a \in (-\infty, +\infty)$. Значит, в силу замечания 1, функции $\sup\limits_{p \in \mathbf{N}} f_p$ и $\inf\limits_{p \in \mathbf{N}} f_p$ измеримы. Функция $\varlimsup\limits_{p \to \infty} f_p$ может быть записана так: $\varlimsup\limits_{p \to \infty} f_p = \inf\limits_{m} (\sup\limits_{p \in \mathbf{N}} f_{p+m})$, и потому измерима. Так же доказывается измеримость функций $\varliminf\limits_{p \to \infty} f_p$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность функций, измеримых на множестве $E (E \in \mathfrak{M})$, пусть f — функция, заданная по крайней мере на множестве $E (E \in \mathfrak{M})$, и пусть

$$\lim_{p \to \infty} f_p(x) = f(x)$$

при почти всех $x \in E$ (относительно некоторой полной меры μ). Тогда функция f измерима на множестве E.

Доказательство. Пусть $E_1 = \{x \in E : f(x) = \lim\limits_{p \to \infty} f_p(x)\}$, $E_0 = E \setminus E_1$. Ясно, что $f(x) = \lim\limits_{p \to \infty} f_p(x)$ при всех $x \in E_1$, и потому функция f измерима на множестве E_1, а также на множестве E_0, так как $\mu E_0 = 0$ и μ — полная мера. Остается сослаться на замечание 3 п. 3.1.

3.4. Теорема 3 (3.II). *Пусть* Φ — *функция, заданная в пространстве* R^m *и непрерывная; пусть* $E \in \mathfrak{M}$ *и пусть* $f^{(1)}$, $f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$ — *измеримые на множестве* E *конечные функции. Тогда сложная функция* (*д.* 1, *п.* 3) $\Phi(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)})$ *измерима на множестве* E.

Доказательство. Пусть $j \in \mathbf{N}_m$ и $\{f_p^{(j)}\}_{p=1}^{\infty}$ — такая последовательность ступенчатых функций, заданных на множестве E, что $\lim\limits_{p \to \infty} f_p^{(j)}(x) = f^{(j)}(x)$ при всех $x \in E$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Существование этих последовательностей вытекает из теоремы 1. Рассмотрим сложную функцию $\Phi(f_p^{(1)}, f_p^{(2)}, \ldots, f_p^{(m)})$. Это — ступенчатая и потому измеримая на множестве E функция.

В самом деле, пусть $\tau_p^{(j)}$ — такое разбиение множества E, что функция $f_p^{(j)}$ постоянна на каждом $e \in \tau_p^{(j)}$. Тогда все функции $f_p^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ постоянны на каждом множестве $e \in \tau_p^{(1)} \vee \tau_p^{(2)} \vee \ldots \vee \tau_p^{(m)}$, а потому и функция $\Phi(f_p^{(1)}, \ldots, f_p^{(m)})$

на нем постоянна. Теперь, пользуясь непрерывностью функции Φ, заключаем, что при любом $x \in E$

$$\Phi\left(f^{(1)}(x), \ldots, f^{(m)}(x)\right) = \lim_{p\to\infty} \Phi\left(f_p^{(1)}(x), \ldots, f_p^{(m)}(x)\right).$$

Применяя следствие теоремы 2, заключаем, что функция $\Phi\left(f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}\right)$ измерима как предел последовательности измеримых функций.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — функции измеримые, заданные на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$), и пусть сумма $f_1 + \ldots + f_m$ определена на множестве E. Тогда функция $f_1 + \ldots + f_m$ измерима на множестве E.*

Доказательство. Пусть $E_0 = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in E : |f_j(x)| < +\infty\}$. Множество E_0 измеримо как пересечение измеримых множеств. Функция $f_1 + \ldots + f_m$ измерима на множестве E_0 по теореме (в качестве функции Φ нужно взять функцию, определенную так: $\Phi(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \ldots + x_m$). На множестве $E \setminus E_0$ функция $f_1 + \ldots + f_m$ принимает всего два значения $-\infty$ и $+\infty$; множество $\{x \in E : f_1(x) + \ldots + f_m(x) = +\infty\} = \bigcup_{j=1}^{m} \{x \in E : f_j(x) = +\infty\}$ и потому измеримо; точно так же проверим измеримость множества $\{x \in E : f_1(x) + \ldots + f_m(x) = -\infty\}$. Значит, сужение функции $f_1 + \ldots + f_m$ на множество $E \setminus E_0$ — ступенчатая измеримая функция. Поэтому функция $f_1 + \ldots + f_m$ измерима на множестве E (см. замечание 3 п. 3.1).

Следствие 2. *Пусть f_1, f_2 — функции, измеримые на множестве E. Тогда произведение $f_1 \cdot f_2$ — функция, измеримая на множестве E.*

Это следствие доказывается так же, как следствие 1 (нужно учесть, что в соответствии с соглашением, принятым в д. 1, п. 1, $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$).

Следствие 3. *Пусть $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — счетное семейство неотрицательных функций, заданных и измеримых на множестве E, и пусть функция $\sum_{\xi \in \Xi} f_\xi$ задана на множестве E равенством $\left(\sum_{\xi \in \Xi} f_\xi\right)(x) = \sum_{\xi \in \Xi} f_\xi(x)$ ($x \in E$). Тогда функция $\sum_{\xi \in \Xi} f_\xi$ измерима на множестве E.*

Доказательство. Пусть φ — взаимнооднозначное отображение множества $\mathbf{N}$ на множество Ξ. Тогда (предл. 5, д. 2, п. 4 и замечание к предл. 1, п. 5)

$$\sum_{\xi \in \Xi} f_\xi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{\varphi(k)}(x).$$

Утверждение следствия вытекает теперь из измеримости всех функций $\sum_{k=1}^{n} f_{\varphi(k)}$ $(n \in \mathrm{N})$ и из следствия к теореме 2.

3.5. В этом пункте мы рассмотрим систему $\mathfrak{M}^{\nu}$ всех подмножеств пространства R^{ν}, измеримых по Лебегу.

Теорема 4 (3.II). *Пусть* $E \in \mathfrak{M}^{\nu}$, $E_0 \subset E$, $\mu_{\nu} E_0 = 0$. *Пусть функция f задана по крайней мере на E и непрерывна в любой точке $x \in E \setminus E_0$. Тогда функция f измерима на множестве E.*

Иными словами, функция, непрерывная почти везде на измеримом по Лебегу множестве, измерима.

Доказательство. Пусть a — конечное вещественное число, пусть $x \in E \setminus E_0$ и $f(x) > a$. Тогда существует такое конечное число $r_x > 0$, что во всех точках z множества $(E \setminus E_0) \cap D^{\nu}(x, r_x)$, где $D^{\nu}(x, r_x)$ — открытый ν-мерный шар с центром в точке x радиуса r_x, выполнено неравенство $f(z) > a$. Множество $G = \bigcup_{x \in E \setminus E_0} D^{\nu}(x, r_x)$ открыто, и $\{x \in E \setminus E_0 : f(x) > a\} = G \cap (E \setminus E_0)$. Так как последнее множество измеримо, то функция f измерима на множестве $E \setminus E_0$. Функция f измерима также на множестве нулевой меры E_0. Значит (см. замечание 3 в п. 3.1), функция f измерима.

3.6. Перейдем теперь к выяснению связи между понятиями суммируемости и измеримости.

Сначала докажем две леммы. Первая из них представляет интерес и сама по себе.

Лемма 1. *Пусть функция φ, заданная на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$, измерима, неотрицательна и суммируема на E. Если $\int_E \varphi \, d\mu = 0$, то $\varphi(x) = 0$ при почти всех $x \in E$.*

Доказательство. Ввиду измеримости функции φ множество $E_p = \left\{x \in E : \varphi(x) \geqslant \frac{1}{p}\right\}$ измеримо при всяком натуральном p. Кроме того, $0 = \int_E \varphi \, d\mu \geqslant \int_{E_p} \varphi \, d\mu \geqslant \frac{1}{p} \mu E_p$. Значит, $\mu E_p = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Но $\{x \in E : \varphi(x) > 0\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$, и потому

$$\mu \{x \in E : \varphi(x) > 0\} = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание. В следующем пункте мы докажем, что суммируемая функция измерима. Поэтому в условиях леммы 1 измеримости функции φ можно не предполагать. Из этой леммы и теоремы 5 (3.II) (см. ниже) вытекает, таким образом, следующее дополнение к утверждению г) теоремы 2 (2.II): если $\varphi \in L(E, \mu)$, $\mu E > 0$ и $\varphi(x) > 0$ при почти всех $x \in E$, то $\int_E \varphi \, d\mu > 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_p\}_{p=1}^{\infty}$ — *убывающая последовательность измеримых неотрицательных функций, суммируемых на множестве* E $(E\in\mathfrak{M})$, *и пусть* $\lim\limits_{p\to\infty}\int\limits_E \varphi_p d\mu=0$. *Тогда* $\varphi_p(x)\underset{p\to\infty}{\to}0$ *при почти всех* $x\in E$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=\lim\limits_{p\to\infty}\varphi_p(x)$ $(x\in E)$; функция φ измерима и неотрицательна. Проверим, что $\varphi\in L(E,\mu)$. Взяв последовательность чисел $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}$ $(\varepsilon_p\underset{p\to\infty}{\to}0$ и $\varepsilon_p>0$, $p=1, 2,\ldots)$ при каждом p $(p=1, 2,\ldots)$, найдем разбиение $\tau_p\in T(\varphi_p, E)$, такое, что $S(\varphi_p, \tau_p)\leqslant\int\limits_E\varphi_p d\mu+\varepsilon_p$. Тогда

$$0\leqslant s(\varphi, \tau_p)\leqslant S(\varphi, \tau_p)\leqslant S(\varphi_p, \tau_p)\leqslant\int\limits_E\varphi_p d\mu+\varepsilon_p \quad (p=1, 2,\ldots)$$

и $\tau_p\in T(\varphi, E)$, $\lim\limits_{p\to\infty}[S(\varphi, \tau_p)-s(\varphi, \tau_p)]=0$. Поэтому, ввиду теоремы 1 (1.II), $\varphi\in L(E, \mu)$. По теореме 2 (2.II) (утверждения г), д)), $0\leqslant\int\limits_E\varphi d\mu\leqslant\int\limits_E\varphi_p d\mu$ при всех $p\in\mathbf{N}$. Следовательно, $\int\limits_E\varphi d\mu=0$. По лемме 1 $\varphi(x)=0$ при почти всех $x\in E$, а это значит, что $\lim\limits_{p\to\infty}\varphi_p(x)=0$ почти везде на множестве E.

Лемма доказана.

3.7. Теорема 5 (3.II). *Пусть функция* f *суммируема на множестве* E $(E\in\mathfrak{M})$ *по мере* μ. *Тогда* f *измерима на множестве* E *(мера* μ, *как всегда, предполагается полной).*

Доказательство. Построим последовательность $\{\tau_p\}_{p=1}^{\infty}$ разбиений множества E, обладающую следующими свойствами: $\tau_p\in T(f, E)$, $\tau_{p+1}\succ\tau_p$ $(p=1, 2,\ldots)$, $\lim\limits_{p\to\infty}[S(f, \tau_p, E)-s(f, \tau_p, E)]=0$ (см. п. 1.6, § 1).* С каждым разбиением τ_p свяжем две ступенчатые функции, заданные на множестве E: $f^{(p)}$ и $f_{(p)}$; $f^{(p)}(x)=M(f, e)$, $f_{(p)}(x)=m(f, e)$ при $x\in e$, $e\in\tau_p$. Заметим, что функции $f_{(p)}$ и $f^{(p)}$ измеримы (см. пример 2). Проверим, что $f_{(p+1)}(x)\geqslant f_{(p)}(x)$; $f^{(p+1)}(x)\leqslant f^{(p)}(x)$ при всех $x\in E$ и всех p $(p=1, 2,\ldots)$. Пусть $x\in e$, $e\in\tau_{p+1}$. Так как $\tau_{p+1}\succ\tau_p$, то суще-

---

* Суммы $S(f, \tau_p, E)$ и $s(f, \tau_p, E)$ определялись только для функций, заданных по крайней мере на множестве E, тогда как теперь (см. определение 4, п. 2.1) называем суммируемыми функции, заданные лишь почти везде на множестве E. Однако, не умаляя общности, можно считать, что функция f задана по крайней мере на E, ибо в противном случае мы рассмотрели бы множество E_1, о котором идет речь в определении 4 (п. 2.1). Подобные вольности речи мы будем иногда допускать и в дальнейшем изложении.

ствует множество $\tilde{e} \in \tau_p$, такое, что $e \subset \tilde{e}$; $f_{p+1}(x) = m(f, e) \geqslant \geqslant m(f, \tilde{e}) = f_p(x)$, $f^{(p+1)}(x) = M(f, e) \leqslant M(f, \tilde{e}) = f^{(p)}(x)$.

Таким образом, разность $f^{(p)}(x) - f_{(p)}(x)$ с ростом p убывает, какова бы ни была точка $x \in E$. Положим $\varphi_p(x) = f^{(p)}(x) - f_{(p)}(x)$. Последовательность функций φ_p удовлетворяет всем условиям леммы 2 предыдущего пункта. В самом деле,

$$\lim_{p\to\infty} \int_E \varphi_p d\mu = \lim_{p\to\infty} \int_E \left(f^{(p)} - f_{(p)}\right) d\mu = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{e\in\tau_p} \int_e f^{(p)} d\mu - \right.$$

$$\left. - \sum_{e\in\tau_p} \int_e f_{(p)} d\mu \right) = \lim_{p\to\infty} (S(f, \tau_p) - s(f, \tau_p)) = 0.$$

Значит, $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi_p(x) = 0$ при почти всех $x \in E$. Но при всех $x \in E$ $f_{(p)}(x) \leqslant f(x) \leqslant f^{(p)}(x)$, так что функция f почти везде на множестве E оказывается пределом последовательности измеримых функций $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ и потому (по теореме 2) измерима.

Теорема доказана.

Далеко не все измеримые функции суммируемы. Суммируемость измеримой функции равносильна существованию хотя бы одного допустимого разбиения.

3.8. Следующая лемма важна потому, что в ней содержится самая существенная часть изложенной ниже теоремы 6 (3.II). Идея ее доказательства была намечена в самом начале параграфа и принадлежит Лебегу.

Лемма 1. *Пусть E ($E \in \mathfrak{M}$) — множество конечной меры и пусть f — ограниченная функция, измеримая на E. Тогда $f \in L(E, \mu)$.*

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Числа $m(f, E)$, $M(f, E)$ конечны по условию. Отрезок $[m(f, E), M(f, E)]$ представим в виде объединения семейства промежутков $\{\Delta_j\}$ ($j \in \mathbb{N}_n$), где $\Delta_j = \left[m(f, E) + \frac{j}{n}(M(f, E) - m(f, E)), m(f, E) + \frac{j+1}{n}(M(f, E) - m(f, E)) \right]$, $j = 0, \ldots, n-2$; $\Delta_{n-1} = \left[M(f, E) - \frac{M(f, E) - m(f, E)}{n}, M(f, E) \right]$, а номер n выбран столь большим, что $\frac{M(f, E) - m(f, E)}{n} \mu E \leqslant \varepsilon$. Множества $e_j = \{x \in E : f(x) \in \Delta_j\}$ ($j = 0, \ldots, n-1$) образуют разбиение τ множества E: все они принадлежат $\mathfrak{M}$, так как функция f измерима; если $x \in E$, то $f(x) \in [m(f, E), M(f, E)] = \bigcup\limits_{j=0}^{n-1} \Delta_j$, так что $E = \bigcup\limits_{e\in\tau} e$; различные множества $e_{j'}$, $e_{j''} \in \tau$ не имеют общих точек, так как $f[e_{j'}] \subset \Delta_{j'}$, $f[e_{j''}] \subset \Delta_{j''}$ и $\Delta_{j'}, \Delta_{j''}$ не имеют общих точек. Разбиение τ допустимо для функции f — ведь для нее допустимы все разбиения множества E (см. п. 1.3).

Оценим сумму $\sum\limits_{e \in \tau} \omega(f, e)\mu e$:

$$\sum_{e \in \tau} \omega(f, e)\mu e = \sum_{j=0}^{n-1} \omega(f, e_j)\mu e_j \leqslant \frac{M(f, E) - m(f, E)}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu e_j = \frac{M(f, E) - m(f, E)}{n} \mu E \leqslant \varepsilon,$$

так как из включения $f(e_j) \subset \Delta_j$ следует, что колебание $\omega(f, e_j)$ не превосходит длины промежутка Δ_j, равной $\frac{M(f, e) - m(f, e)}{n}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Остается вспомнить критерий суммируемости (п. 1.6).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция f задана по крайней мере на множестве E, измерима на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$ и $T(f, E) \neq \Lambda$, то $f \in L(E, \mu)$.*

Доказательство. Ввиду того, что множество $T(f, E)$ не пусто, существует допустимое для функции f разбиение τ множества E (см. определение 1 п. 1.3). Пусть ε — какое-нибудь положительное число. Положим

$$\tau_0 = \{e \in \tau : M(f, e) \neq +\infty\} \cap \{e \in \tau : m(f, e) \neq -\infty\} \cap \{e \in \tau : \mu e < +\infty\}.$$

Согласно предл. 2 (д. 2, п. 5), найдется такое семейство положительных чисел $\{\varepsilon_e\}$ $(e \in \tau_0)$, что $\sum\limits_{e \in \tau_0} \varepsilon_e = \varepsilon$. По лемме 1, при любом $e \in \tau_0$ существует допустимое разбиение τ_e множества e, такое, что $\sum\limits_{\tilde{e} \in \tau_e} \omega(f, \tilde{e})\mu\tilde{e} \leqslant \varepsilon_e$. Пусть теперь $\tau_\varepsilon = \left(\bigcup\limits_{e \in \tau_0} \tau_e\right) \cup (\tau \setminus \tau_0)$.

Ясно, что $\tau_\varepsilon \succ \tau$. Поэтому (лемма 1 п. 1.3) $\tau_\varepsilon \in T(f, E)$. Кроме того, согласно предл. 6 (д. 2, п. 4),

$$\sum_{\tilde{e} \in \tau_\varepsilon} \omega(f, \tilde{e})\mu\tilde{e} = \sum_{e \in \tau_0} \sum_{\tilde{e} \in \tau_e} \omega(f, \tilde{e})\mu\tilde{e} \leqslant \sum_{e \in \tau_0} \varepsilon_e = \varepsilon$$

(мы не пишем слагаемых, отвечающих множествам $\tilde{e} \in \tau \setminus \tau_0$, ибо они равны нулю). Остается вспомнить известный признак суммируемости (п. 1.6).

Лемма доказана.

Теорема 6 (3.II). *Пусть f — функция, заданная по крайней мере на множестве E, измеримая на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$, и пусть $h_1, h_2 \in L(E, \mu)$. Если*

$$h_1(x) \leqslant f(x) \leqslant h_2(x) \text{ при всех } x \in E, \tag{2}$$

то и $f \in L(E, \mu)$.

Доказательство. Пусть $\tau_j \in T(h_j, E)$ $(j=1, 2)$. Тогда (лемма 1 п. 1.3) разбиение $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ допустимо и для h_1, и для h_2. Из неравенства (2) следует, что

$$m(h_1, e)\mu e \leqslant m(f, e)\mu e \leqslant m(h_2, e)\mu e,$$
$$M(h_1, e)\mu e \leqslant M(f, e)\mu e \leqslant M(h_2, e)\mu e$$

при всех $e \in \tau$.

Применяя предложение 3 (д. 2, п. 4), заключаем, что $\tau \in T(f, E)$, и потому $T(f, E) \neq \Lambda$. Функция f измерима на множестве E по условию, и остается сослаться на лемму 2.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция f задана по крайней мере на множестве E, измерима на множестве E, если функция h суммируема на множестве E по мере μ и если*

$$|f(x)| \leqslant h(x)$$

при всех $x \in E$, то $f \in L(E, \mu)$.

Доказательство. Применим теорему с $h_1 = -h$, $h_2 = h$.

Отметим, в частности, что если функция f измерима на множестве E и неотрицательна:

$$f(x) \geqslant 0$$

при всех $x \in E$, и если $f(x) \leqslant h(x)$ при всех $x \in E$, где $h \in L(E, \mu)$, то и $f \in L(E, \mu)$.

Следствие 2. *Для того чтобы функция f была суммируемой на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой на множестве E и чтобы $|f| \in L(E, \mu)$.*

Доказательство. Необходимость была установлена в теоремах 5 (3.II) и 2 (2.II). Достаточность вытекает из следствия 1 (нужно положить $h = |f|$).

Следствие 3. *Если f и g — функции, измеримые на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$, $f \in L(E, \mu)$, а g — ограничена, то $fg \in L(E, \mu)$.*

Доказательство. Произведение fg — измеримая функция на множестве E; $|fg| \leqslant M(|g|, E) \cdot |f|$, функция $M(|g|, E) \cdot |f|$ суммируема на множестве E по теореме 2 (2.II). Остается применить следствия 1 и 2.

3.9. Подытожим теперь известные нам достаточные условия суммируемости в следующих двух утверждениях.

1. Если множество E $(E \in \mathfrak{M})$ имеет конечную меру, а функция f измерима и ограничена на множестве E, то $f \in L(E, \mu)$ (лемма 1).

2. Если множество E $(E \subset R^\nu)$ измеримо по Лебегу и ограничено и если функция f, заданная на множестве E, непрерывна почти во всех точках E и ограничена, то f суммируема на множестве E по мере Лебега. Это сразу следует из предыдущего утверждения и теоремы 4 (3.II).

Рассмотрим несколько примеров суммируемых функций.

Пример 1. Пусть функция f задана на ограниченном и замкнутом множестве E $(E \subset R^{\nu})$ и непрерывна на нем. Тогда $f \in L$ (E, μ_{ν}), ибо f ограничена по известной теореме Вейерштрасса, а $\mu_{\nu} E < +\infty$.

Пример 2. Пусть функция f задана на промежутке $[a, b]$ $(a, b \in R)$ и непрерывна на нем всюду, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода (скачки). Тогда, как легко видеть, функция f ограничена, а потому и суммируема (по Лебегу) на промежутке $[a, b]$.

Пример 3. Пусть γ — кусочно-гладкий путь (д. 3, п. 3), заданный на $[a, b]$, носитель $\gamma\,[[a, b]]$ которого содержится в открытом множестве G, $\mu_2(G) < +\infty$ $(G \subset R^2)$, и пусть f — ограниченная функция, заданная на множестве G и непрерывная во всех точках множества $G \diagdown \gamma\,[[a, b]]$. Тогда $f \in L\,(G, \mu_2)$. В самом деле, ведь $\mu_2\,(\gamma\,[[a, b]]) = 0$ (см. гл. I, п. 4.2).

Если воспользоваться результатом упражнения, предложенного в конце п. 4.2 гл. I, то можно доказать следующее.

Пример 4. Если Γ — гладкая λ-мерная поверхность, содержащаяся в ограниченном множестве $E \in \mathfrak{M}^{\nu}$ $(\nu > \lambda)$, а ограниченная функция f задана на множестве E и непрерывна на множестве $E \diagdown \Gamma$, то $f \in L\,(E, \mu_{\nu})$.

Утверждения 1 и 2 очень важны. В них установлена суммируемость широкого класса функций. Но часто приходится решать вопрос о суммируемости неограниченных функций или функций, заданных на множестве бесконечной меры.

Для этого бывают полезными излагаемые ниже результаты (особенно в сочетании со следствием 3 теоремы 6).

Лемма. *Пусть функция f_{α} задана на множестве $R^{\nu} \diagdown \{0\}$* равенством.*

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\|x\|_{\nu}^{\alpha}} = \frac{1}{(x_1^2 + \ldots + x_{\nu}^2)^{\alpha/2}} \quad \left(x = (x_1, \ldots, x_{\nu}),\ \sum_{s=1}^{\nu} x_s^2 \neq 0\right).$$

1. *Если* $\alpha < \nu$, *то* $f_{\alpha} \in L\,(\underbrace{[-a, a] \times \ldots \times [-a, a]}_{\nu\ \text{раз}}, \mu_{\nu})$; *если*

$$\alpha \geqslant \nu, \ \text{то}\ f_{\alpha} \overline{\in} L\,(\underbrace{[-a, a] \times \ldots \times [-a, a]}_{\nu\ \text{раз}}, \mu_{\nu})$$

$(0 < a < +\infty)$.

2. *Если* $\alpha > \nu$, *то* $f_{\alpha} \in L\,(R^{\nu} \diagdown \underbrace{[-a, a] \times \ldots \times [-a, a]}_{\nu\ \text{раз}}, \mu_{\nu})$;

если $\alpha \leqslant \nu$, *то* $f_{\alpha} \overline{\in} L\,(R^{\nu} \diagdown \underbrace{[-a, a] \times \ldots \times [-a, a]}_{\nu\ \text{раз}}, \mu_{\nu})$

$(0 < a < +\infty)$.

* Символом 0 мы обозначаем здесь ту точку множества R^{ν}, все координаты которой равны нулю.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\Delta_p = \underbrace{\left[-\frac{a}{2^p}, \frac{a}{2^p}\right] \times \ldots \times \left[-\frac{a}{2^p}, \frac{a}{2^p}\right]}_{\nu \text{ раз}}$ $(p=1, 2, \ldots)$ (так что $\Delta_0 = \underbrace{[-a, a] \times \ldots \times [-a, a]}_{\nu \text{ раз}}$) и пусть $E_p = \Delta_p \setminus \Delta_{p+1}$ $(p=0, 1, 2\ldots)$. Функция f_α непрерывна на множестве E_p $(p=0, 1, 2, \ldots)$ и потому измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}^\nu$ по теореме 4 (3.II). Кроме того, ясно, что функция f_α ограничена на множестве E_p и $\mu_\nu E_p < +\infty$ при любом $p \in \mathbf{N}$. Значит, по лемме 1 п. 3.8, $f_\alpha \in L(E_p, \mu_\nu)$ при каждом $p=0, 1, 2, \ldots$.

Учитывая равенства

$$\Delta_0 = \bigcup_{p=0}^{\infty} E_p \cup \{0\}, \quad E_{p'} \cap E_{p''} = \Lambda \text{ при } p' \neq p''$$

и неотрицательность функции f_α, заключаем, что для суммируемости функции f_α на квадрате Δ_0 необходима и достаточна сходимость ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \int\limits_{E_p} f_\alpha d\mu_\nu$ (следствие 1 к теореме 5 (2.II)).

Если $x \in E_p$, $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$, то $x \in \Delta_p$, и потому $|x_j| \leqslant \frac{a}{2^p}$ $(j=1, \ldots, \nu)$, следовательно, $f_\alpha(x) = \frac{1}{(|x_1|^2 + \ldots + |x_\nu|^2)^{\alpha/2}} \geqslant$ $\geqslant \frac{2^{\alpha p}}{(a\sqrt{\nu})^\alpha}$ *, так что $m(f_\alpha, E_p) \geqslant m(f_\alpha, \Delta_p) \geqslant \frac{2^{\alpha p}}{a^\alpha \cdot \nu^{\alpha/2}}$.

С другой стороны, если $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in E_p$, то $x \in R^\nu \setminus \Delta_{p+1}$. Значит, среди номеров $1, \ldots, \nu$ найдется номер j, такой, что

$$|x_j| \geqslant \frac{a}{2^{p+1}}, \text{ и потому } f_\alpha(x) = \frac{1}{(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{\alpha/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(|x_j|^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{|x_j|^\alpha} \leqslant \frac{2^\alpha \cdot 2^{\alpha p}}{a^\alpha}. \text{ Значит, } M(f_\alpha, E_p) \leqslant$$

$$\leqslant M(f_\alpha, R^\nu \setminus \Delta_{p+1}) \leqslant \left(\frac{2}{a}\right)^\alpha \cdot 2^{\alpha p}.$$

Вычислим еще лебегову меру множества E_p:

$$\mu_\nu E_p = \mu_\nu (\Delta_p \setminus \Delta_{p+1}) = \mu_\nu \Delta_p - \mu_\nu \Delta_{p+1} = \left(\frac{2a}{2^p}\right)^\nu - \left(\frac{2a}{2^{p+1}}\right)^\nu.$$

Таким образом, $\frac{(2a)^\nu}{2} \cdot \frac{1}{2^{\nu p}} \leqslant \mu E_p \leqslant (2a)^\nu \cdot \frac{1}{2^{\nu p}}$, $p = 1, 2, \ldots$

---

* Мы считаем, что $\alpha > 0$, так как если $\alpha \leqslant 0$, то f_α непрерывна и ограничена на квадрате Δ_1.

Нетрудно оценить произведения $M(f_\alpha, E_p)\mu_\nu E_p$ и $m(f_\alpha, E_p)\mu_\nu E_p$:

$$M(f_\alpha, E_p)\mu_\nu E_p \leqslant \left(\frac{2}{a}\right)^\alpha 2^{\alpha p}\frac{(2a)^\nu}{2^{\nu p}} = C\frac{1}{2^{(\nu-\alpha)p}},$$

где $C = \left(\frac{2}{a}\right)^\alpha (2a)^\nu$, $p = 1, 2, \ldots,$

$$m(f_\alpha, E_p)\mu_\nu E_p \geqslant \frac{2^\alpha p}{(a\sqrt{\nu})^\nu}\cdot\frac{(2a)^\nu}{2}\cdot\frac{1}{2^{\nu p}} = C'\frac{1}{2^{(\nu-\alpha)p}},$$

где $C' = \frac{(2a)^\nu}{2(a\sqrt{\nu})^\alpha} > 0$, $p = 1, 2, \ldots$

Так как на основании теоремы 2 (2.II)

$$m(f_\alpha, E_p)\mu_\nu E_p \leqslant \int\limits_{E_p} f_\alpha d\mu_\nu \leqslant M(f_\alpha, E_p)\mu_\nu E_p, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

то и подавно

$$C'\frac{1}{2^{(\nu-\alpha)p}} \leqslant \int\limits_{E_p} f_\alpha d\mu_\nu \leqslant C\frac{1}{2^{(\nu-\alpha)p}}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, если $\nu > \alpha$, то

$$\sum_{p=1}^{\infty}\int\limits_{E_p} f_\alpha d\mu_\nu < +\infty, \text{ а если } \nu \leqslant \alpha, \text{ то}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\int\limits_{E_p} f_\alpha d\mu_\nu = +\infty.$$

Первое утверждение леммы доказано, а второе доказывается аналогично.

Теорема 7 (3.II). а) *Пусть g — функция, измеримая на квадрате* $\Delta = [-a, a]\times\ldots\times[-a, a]$ $(0 < a < +\infty)$. *Если* $\alpha < \nu$ *и функция* g *ограничена, то** $gf_\alpha \in L(\Delta, \mu_\nu)$. *Если* $m(g, \Delta) > 0$ *и* $\alpha \geqslant \nu$, *то* $gf_\alpha \overline{\in} L(\Delta, \mu_\nu)$.

б) *Пусть g — функция, измеримая на дополнении $R^\nu\setminus\Delta$ квадрата Δ. Если $\alpha > \nu$ и g ограничена, то $gf_\alpha \in L(R^\nu\setminus\Delta, \mu_\nu)$. Если $\alpha \leqslant \nu$ и $m(g, R^\nu\setminus\Delta) > 0$, то*

$$gf_\alpha \overline{\in} L(R^\nu\setminus\Delta, \mu_\nu).$$

Доказательство. Докажем утверждение а). Если $\alpha < \nu$ и g — ограниченная функция, то произведение gf_α суммируемо в Δ в силу доказанной леммы и следствия 3 п. 3.8. Запишем теперь неравенство $g(x)f_\alpha(x) \geqslant m(g, \Delta)f_\alpha(x)$, справедливое при всех $x \in \Delta$, $x \neq 0$, и пусть $\alpha \geqslant \nu$, $m(g, \Delta) > 0$. Если бы произ-

* Функция f_α определена в лемме на стр. 140.

ведение gf_α было суммируемым в Δ, то, по теореме 6, была бы суммируемой в Δ и функция $m(g, \Delta)f_\alpha$, а тогда, по теореме 2 (2.II) (утверждение б)), и f_α была бы суммируемой в Δ, что неверно. Аналогично проверяется и утверждение б).

Теорема доказана.

Приведем несколько примеров исследования функций на суммируемость.

Пример 1. Выясним, суммируема ли (по Лебегу) на промежутке $(0, +\infty)$ функция $F: F(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $(x \in (0, +\infty))$.

Рассмотрим промежуток $[1, +\infty)$. Для всех точек $x \in [1, +\infty)$ $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geqslant \frac{\operatorname{arctg} 1}{x}$. Значит, функция F не суммируема в промежутке $[1, +\infty)$, а тем более во всем промежутке $(0, +\infty)$.

Пример 2. Пусть $F_a(x) = e^{-x}x^{a-1}$, $a > 0$, $x > 0$. Докажем, что $F_a \in L((0, +\infty), \mu_1)$.

Функция F_a непрерывна всюду и потому измерима. Имеются две причины, по которым F_a может оказаться несуммируемой: бесконечность меры μ_1 промежутка $(0, +\infty)$ и неограниченность функции F (при $a < 1$ в промежутке вида $(0, A)$).

Проверим, что $F_a \in L((0, A), \mu_1)$ при любом $A \in (0, +\infty)$. Если $a \geqslant 1$, то справедливость этого утверждения вытекает из утверждения 2 в п. 3.9. Если $a < 1$, то мы можем применить утверждение а) теоремы 7: $F_a = f_{1-a}g$, где $g(x) = e^{-x}$ $(x \in (0, +\infty))$, а $1 - a < \nu = 1$.

Проверим теперь, что $F \in L([A, +\infty), \mu_1)$ $(0 < A < +\infty)$. Пусть $\alpha > 1$, тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} F_a(x)x^\alpha = 0$, и потому $F_a(x) = \frac{\tilde{g}(x)}{x^\alpha}$, где $\tilde{g}$ — ограниченная функция $(x \in [A, +\infty))$. Остается еще раз применить теорему 7.

Итак, функция F_a на промежутках $(0, A)$ и $[A, +\infty)$ суммируема. Поэтому $F_a \in L((0, +\infty), \mu_1)$.

Этот результат показывает, что каждому числу $a \in (0, +\infty)$ отвечает число $\int\limits_{(0, +\infty)} F_a d\mu_1$; иными словами, возникает отображение промежутка $(0, +\infty)$ в множество R, ставящее в соответствие числу $a \in (0, +\infty)$ число $\int\limits_{(0, +\infty)} F_a d\mu_1$. Это отображение называют Г-функцией (гамма-функцией) и обозначают буквой Г. Г-функция очень употребительна в анализе (почти так же, как привычные читателю функции sin, cos, log и т. д.).

Выпишем еще раз равенство, определяющее эту функцию:

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}dt \quad (a \in (0, +\infty)).$$

Вычислим значение Г-функции в точке n $(n \in \mathbf{N})$. Сначала подсчитаем $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n e^{-t} dt$$

(следствие 1 теоремы 3 (2.II));

$$\int_0^n e^{-t} dt = 1 - e^{-n} \quad (n \in \mathbf{N})$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница; поэтому

$$\Gamma(1) = \lim_{n \to \infty} (1 - e^{-n}) = 1.$$

Докажем, что

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N}) \tag{3}$$

(мы, как обычно, считаем, что $0! = 1$). При $n = 1$ это равенство уже установлено. Допустим, что оно верно при некотором n, и проверим, что тогда оно верно и при $n + 1$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Для этого достаточно проверить, что $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ при любом $a \in (0, +\infty)$. Имеем

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^a dt = \lim_{m \to +\infty} \int_0^m e^{-t} t^a dt =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left[- e^{-t} t^a \Big|_0^m + a \int_0^m t^{a-1} e^{-t} dt \right] =$$

$$= \lim_{m \to \infty} (-e^{-m} m) + a \lim_{m \to \infty} \int_0^m t^{a-1} e^{-t} dt =$$

$$= a \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = a\Gamma(a).$$

Формула $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ называется формулой приведения для Г-функции.

Пример 3. Пусть $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \in (0, +\infty))$. Функция F непрерывна, но не суммируема на промежутке $(0, +\infty)$. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |F(x)|\, dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin x|\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

так что $|F|\overline{\in} L((0, +\infty), \mu_1)$, а потому и $F\overline{\in} L((0, +\infty), \mu_1)$ (следствие 2 к теореме 6).

В связи с содержанием этого пункта у читателя может сложиться впечатление, что суммируемость измеримой функции на множестве бесконечной лебеговой меры непременно связана с достаточно быстрым стремлением этой функции к нулю в бесконечности. Нижеследующий пример показывает, однако, что это не всегда так.

Пример 4. Пусть функция f задана на луче $[0, +\infty)$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} k, \text{ если } & x\in\left[k,\ k+\frac{1}{2^k}\right] \text{при некотором } k\,(k=1,2,\ldots), \\ 0, \text{ если } & x\overline{\in}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left[k,\ k+\frac{1}{2^k}\right]. \end{cases}$$

Эта функция ступенчатая и неотрицательная, причем $\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = \frac{k}{2^k}$, так что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx<+\infty$ и $f\in L([0, +\infty), \mu_1)$.

Пример 5. Пусть Ξ — не более чем счетное множество, $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — числовое семейство, а $\mathfrak{M}$ — множество всех подмножеств множества Ξ, и пусть μe равно числу элементов множества e $(e\subset\Xi)$, если e — конечное множество и $\mu e=+\infty$ в противном случае. Пусть $f(\xi)=a_\xi$ $(\xi\in\Xi)$. Легко понять, что $f\in L$ (Ξ, μ) тогда и только тогда, когда числовое семейство $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ суммируемо. В этом случае $\int\limits_\Xi f d\mu=\sum\limits_{\xi\in\Xi} a_\xi$. Напомним, что мера μ уже была рассмотрена (пример 2 из п. 2.1 гл. I).

3.10. Лемма 2 из п. 3.8 показывает, что если функция f измерима, неотрицательна и не суммируема на множестве E $(E\in\mathfrak{M})$, то суммы $\sum\limits_{e\in\tau} M(f, e)\,\mu e$, отвечающие любому разбиению τ множества E, равны $+\infty$. Можно проверить (и мы предоставляем это читателю в качестве полезного и не очень легкого упражнения), что $\sup\limits_\tau \sum\limits_{e\in\tau} m(f, e)\,\mu e=+\infty$ (supremum вычисляется по всем разбиениям множества E). Поэтому для несуммируемой неотрицательной измеримой функции supremum „нижних сумм" и infimum „верхних сумм" Дарбу равны. Ввиду этого представляется естественным следующее определение.

Определение 1. Пусть множество $E\in\mathfrak{M}$, функция f измерима на множестве E и неотрицательна: $f(x)\geqslant 0$ $(x\in E)$. Если $f\overline{\in} L(E, \mu)$, то $\int\limits_E f d\mu=+\infty$.

Теперь можно определить интеграл для некоторых несуммируемых функций, принимающих значения разных знаков. Сначала заметим, что если функция f измерима, то f^+ и f^- также измеримы (см. пример 3 в п. 3.1) и неотрицательны.

Определение 2. Пусть множество $E \in \mathfrak{M}$, f — функция, измеримая на множестве E. Предположим, что $\int\limits_E f^+ d\mu$ и $\int\limits_E f^- d\mu$ не равны одновременно $+\infty$ (т. е. хоть одна из функций f^+ и f^- суммируема на множестве E). Тогда говорят, что функция f имеет интеграл, и полагают $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E f^+ d\mu - \int\limits_E f^- d\mu$.

Отметим сразу же, что если $f \in L(E, \mu)$, то ранее определенный интеграл функции f (см. п. 1.5) равен ее интегралу в смысле только что данного определения. Это следует из теоремы 2 (2.II).

Не следует думать, что рассмотрение интегралов от несуммируемых функций вызвано стремлением к чисто формальной общности. Потребность в таких интегралах возникает хотя бы в связи с задачей о мере подграфика неотрицательной измеримой функции (см. введение к этой главе). Ведь мера подграфика имеет смысл для любой такой функции, независимо от того, будет ли эта функция суммируема или нет. В § 5 мы увидим, что мера подграфика функции всегда равна лебеговскому интегралу этой функции. Кроме того (и это самое существенное), введение бесконечных интегралов сокращает и упрощает формулировки многих важных теорем (см., например, теорему Леви в § 4) и очень облегчает вычисление интегралов от положительных измеримых функций (см. примеры в § 6).

Необходимо впредь четко отличать свойство функции быть суммируемой от свойства иметь интеграл: функция может иметь интеграл по некоторому множеству, не будучи на этом множестве суммируемой.

Сейчас мы покажем, что теоремы § 2 обобщаются на случай функций, имеющих интеграл.

Предложение 1. Если функции f и g измеримы на множестве $E (E \in \mathfrak{M})$, причем $f \sim g$ (см. определение 2 п. 2.1), и f имеет интеграл, то и g имеет интеграл, и $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E g d\mu$.

Доказательство. Легко видеть, что если $f \sim g$, то $f^+ \sim g^+$ и $f^- \sim g^-$. Так как f имеет интеграл, то либо f^+, либо f^- — суммируемая функция. Если и f^+, $f^- \in L(E, \mu)$, то и $f \in L(E, \mu)$ (теорема 2(2.II)), и доказательство завершается ссылкой на теорему 1(2.II). Пусть, скажем, $f^+ \in L(E, \mu)$, а $f^- \overline{\in} L(E, \mu)$. Тогда, в силу теоремы 1(2.II), $g^+ \in L(E, \mu)$ и

$\int\limits_E f^+d\mu=\int\limits_E g^+d\mu$, а $g^-\overline{\in}L(E,\ \mu)$ по той же теореме, ибо в противном случае функция f^-, будучи эквивалентной суммируемой функции g^-, сама была бы суммируема. Значит, $\int\limits_E g^-d\mu=\int\limits_E f^-d\mu=+\infty$ и

$$\int\limits_E fd\mu=\int\limits_E f^+d\mu-\int\limits_E f^-d\mu=\int\limits_E g^+d\mu-\int\limits_E g^-d\mu=\int\limits_E gd\mu.$$

Предложение 2. Пусть функции f, g измеримы на множестве E $(E\in\mathfrak{M})$ и пусть $f(x)\leqslant g(x)$ при всех $x\in E$.

Если функция g имеет интеграл и если $\int\limits_E gd\mu<+\infty$, то и функция f имеет интеграл, и

$$\int\limits_E fd\mu\leqslant\int\limits_E gd\mu.^* \qquad (4)$$

Если функция f имеет интеграл и если $-\infty<\int\limits_E fd\mu$, то и функция g имеет интеграл, и выполняется неравенство (4).

Доказательство. Заметим, что если $f(x)\leqslant g(x)$ при всех $x\in E$, то $f^+(x)\leqslant g^+(x)$, $g^-(x)\leqslant f^-(x)$ при всех $x\in E$. Если функция g имеет интеграл и $\int\limits_E gd\mu<+\infty$, то $g^+\in L(E,\ \mu)$. Но ведь функция f^+ измерима и неотрицательна на E. Значит (теорема 6), $f^+\in L(E,\ \mu)$, и функция f имеет интеграл. Кроме того,

$$\int\limits_E f^+d\mu\leqslant\int\limits_E g^+d\mu. \qquad (5)$$

Если функция f^- суммируема на множестве E, то, по теореме 6, $g^-\in L(E,\ \mu)$ и

$$\int\limits_E g^-d\mu\leqslant\int\limits_E f^-d\mu.$$

Если же $f^-\overline{\in}L(E,\ \mu)$, то правая часть последнего неравенства равна $+\infty$, и это неравенство верно тривиальным образом. Умножим его на -1 и, сложив с неравенством (5), получим неравенство (4). Такие же рассуждения приводят к цели и в том случае, когда $\int\limits_E fd\mu>-\infty$.

Следствие 1. *Если функция F измерима на множестве E, $m\leqslant F(x)\leqslant M$ при всех $x\in E$, m, $M\in[-\infty,\ +\infty]$, и хотя бы*

* Заметим, что ни одна из функций, о которых идет речь в этом предложении, не обязана быть суммируемой.

одно из произведений $m\mu E$, $M\mu E$ конечно, то функция F имеет интеграл и

$$m\mu E \leqslant \int_E F d\mu \leqslant M\mu E.$$

Доказательство. Если $M\mu E < +\infty$, то применим предложение 2, полагая $f = F$, а $g(x) = M$ $(x \in E)$; если же $-\infty < m\mu E$, то положим $f(x) = m$ $(x \in E)$, а $g = F$.

Предложение 3. Пусть функции f и g измеримы на множестве E и имеют интеграл; пусть α и β — конечные вещественные числа и пусть символ $\alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$ имеет смысл. Тогда функция $\alpha f + \beta g$ определена почти везде на E, имеет интеграл и $\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$.

Доказательство. Если обе функции f и g суммируемы на множестве E, то утверждение следует из теоремы 2(2.II). Поэтому ниже мы будем предполагать, что хоть одна из функций f и g не суммируема.

Пусть $\alpha = \beta = 1$. Раз сумма $\int_E f + \int_E g$ имеет смысл, то либо оба интеграла равны $+\infty$, либо оба интеграла равны $-\infty$, либо одна из функций f и g суммируема, а другая нет (если оба интеграла конечны, то обе функции f и g суммируемы).

Рассмотрим случай, когда $\int_E f = \int_E g = +\infty$. В этом случае функции f^-, $g^- \in L(E, \mu)$, а f^+, $g^+ \overline{\in} L(E, \mu)$. Значит, сумма $f(x) + g(x) = f^+(x) + g^+(x) - f^-(x) - g^-(x)$ имеет смысл при почти всех $x \in E$, так как функции f^- и g^-, будучи суммируемыми, конечны почти везде на E.

Если бы функция $f + g$ была суммируемой на множестве E, то она была бы конечной почти везде на множестве E (теорема 1(2.II)), и почти при всех $x \in E$ оказалось бы, что

$$f^+(x) + g^+(x) = (f + g)(x) + (f^- + g^-)(x),$$

и потому функция $f^+ + g^+$ была бы суммируема на множестве E как сумма двух суммируемых функций (ведь $f^- + g^- \in L(E, \mu)$). Но $f^+(x) \leqslant f^+(x) + g^+(x)$ $(x \in E)$, $g^+(x) \leqslant f^+(x) + g^+(x)$ $(x \in E)$, и мы заключили бы (пользуясь предл. 2), что $\int_E f^+ d\mu < +\infty$, $\int_E g^+ d\mu < +\infty$, тогда как $f^+ \overline{\in} L(E, \mu)$, $g^+ \overline{\in} L(E, \mu)$.

Итак, $f + g \overline{\in} L(E, \mu)$. Но из очевидного неравенства $(f+g)^-(x) \leqslant f^-(x) + g^-(x)$ $(x \in E)$ и из предл. 2 следует, что $(f+g)^- \in L(E, \mu)$. Следовательно, $(f+g)^+ \overline{\in} L(E, \mu)$, и функция $f + g$ имеет интеграл $\int_E (f+g)\, d\mu$, равный $+\infty$, что и требовалось доказать.

Случай $\int\limits_E f = \int\limits_E g = -\infty$ аналогичен только что рассмотренному.

Если же одна из функций, скажем f, суммируема, а g — нет, то f почти везде конечна, и потому сумма $f+g$ определена почти везде на множестве E. Остальное следует, как и выше, из равенства $(f+g)(x) = f^+(x) + g^+(x) - f^-(x) - g^-(x)$, справедливого при почти всех $x \in E$.

Пусть теперь α — любое число. Заметим, что

$$(\alpha f)^+ = \begin{cases} \alpha f^+, & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha f^-, & \text{если } \alpha < 0, \end{cases}$$

$$(\alpha f)^- = \begin{cases} \alpha f^-, & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha f^+, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Если например, $\int\limits_E f d\mu = +\infty$, то $\int\limits_E f^+ d\mu = +\infty$, $\int\limits_E f^- d\mu < +\infty$. Если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ и функция $(\alpha f)^+$ не может быть суммируема, так как иначе и $f^+ = \frac{1}{\alpha}(\alpha f)^+$ была бы суммируема. С другой стороны, функция $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ суммируема, так что

$$\int\limits_E \alpha f d\mu = \int\limits_E (\alpha f)^+ d\mu - \int\limits_E (\alpha f)^- d\mu = +\infty = \alpha \int\limits_E f d\mu.$$

Все прочие возможности исследуются точно так же.

Пусть, наконец, α и β — любые числа. Тогда, по доказанному, функции αf и βg имеют интеграл, и $\int\limits_E \alpha f d\mu = \alpha \int\limits_E f d\mu$, $\int\limits_E \beta g d\mu = \beta \int\limits_E g d\mu$. Остается применить первую часть рассуждения к сумме $f_1 + g_1$, где $f_1 = \alpha f$, $g_1 = \beta g$.⌉

Предложение 4. Если функция f измерима, неотрицательна и конечна почти везде на множестве E, то функция множества λ, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{M}_E$ равенством

$$\lambda(e) = \int\limits_e f d\mu \quad (e \in \mathfrak{M}_E),$$

является мерой (определение σ-алгебры $\mathfrak{M}_E$ дано в п. 2.3 этой главы).

Доказательство. Ясно, что $\lambda(e) \in [0, +\infty]$ при всех $e \in \mathfrak{M}_E$. Проверим, что функция λ счетно-аддитивна. Пусть $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более чем счетное семейство измеримых подмножеств множества E, $E_{\xi'} \cap E_{\xi''} = \Lambda$ при $\xi' \neq \xi''$. Тогда

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi} f d\mu = \sum_{\xi \in \Xi} \int\limits_{E_\xi} f d\mu.$$

В самом деле, если последняя сумма конечна, то, по теореме 5 (2.II), функция f суммируема на множестве $\bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi$, и равенство

$$\lambda\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi\right) = \sum_{\xi \in \Xi} \lambda E_\xi \tag{6}$$

в этом случае доказано.

Если же $\sum_{\xi \in \Xi} \int_{E_\xi} f d\mu = +\infty$, то функция f не может быть суммируемой на $\bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi$ (по теореме 3(2.II)), и потому $\int_{\bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi} f d\mu = +\infty$. Значит, и в этом случае равенство (6) установлено.

Проверим, что λ — σ-конечная функция множества. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность измеримых подмножеств множества E, $\mu A_k < +\infty$ при всех k ($k = 1, 2, \ldots$). Положим $E_k = \{x \in A_k : f(x) \leqslant k\}$, $E_{+\infty} = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$. Легко видеть, что $E = E_{+\infty} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Вместе с тем, $\lambda(E_{+\infty}) = 0$ (так как $\mu E_{+\infty} = 0$), $\lambda(E_k) < +\infty$, так как, по лемме 1 п. 3.8, функция f суммируема на множестве E_k.

Замечание. Если функция f, заданная на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$), имеет интеграл, то

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f| \, d\mu.$$

Доказательство. Для суммируемых функций это было установлено в теореме 2(2.II). Если же $f \overline{\in} L(E, \mu)$, то $|f| \overline{\in} L(E, \mu)$ (см. следствие 2 теоремы 6), и последнее неравенство также верно.

3.11. Пусть f — комплекснозначная функция, заданная на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$). Мы будем говорить, что функция f измерима, если измеримы вещественные функции $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$.

Легко понять, что теорема 5 верна и для комплекснозначных функций.

Теорема 8 (3.II). *Комплекснозначная функция f суммируема на множестве E ($E \in \mathfrak{M}$) в том и только в том случае, когда она измерима на этом множестве и $|f| \in L(E, \mu)$; кроме того, если f суммируема на множестве E, то*

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f| \, d\mu. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $f_1(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$, $f_2(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$ ($x \in E$). Пусть f — измеримая функция и $|f| \in L(E, \mu)$. Тогда функции f_1 и f_2 измеримы на E и $|f_1(x)| \leqslant |f(x)|$,

$|f_2(x)| \leqslant |f(x)|$ $(x \in E)$. По теореме 6, $f_j \in L(E, \mu)$ $(j=1, 2)$, и, значит, функция f суммируема на множестве E. Если же известно, что функция f суммируема на множестве E, то, по определению (см. п. 2.6), f_1 и f_2 суммируемы, а потому и измеримы на E. Значит, и f — измеримая функция. Кроме того, $|f(x)| = \sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)} \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)|$ $(x \in E)$. Функция $|f|$ измерима на множестве E по теореме 3, а так как $|f_1| + |f_2| \in L(E, \mu)$, то $|f| \in L(E, \mu)$.

Осталось доказать неравенство (7). В том случае, когда $\int\limits_E f d\mu = 0$, оно очевидно. Если же $\int\limits_E f d\mu \neq 0$, то положим

$$z = \left| \int\limits_E f d\mu \right| \left(\int\limits_E f d\mu \right)^{-1}.$$

Ясно, что $|z| = 1$ и $z \int\limits_E f d\mu = \left| \int\limits_E f d\mu \right|$.

В силу аналога теоремы 2 (2.II) для комплекснозначных функций, $z \int\limits_E f d\mu = \int\limits_E z f d\mu$. По определению интеграла от комплекснозначной функции $\operatorname{Re}\left(\int\limits_E z f d\mu\right) = \int\limits_E \operatorname{Re}(zf)\, d\mu$. Итак,

$$\left| \int\limits_E f d\mu \right| = z \int\limits_E f d\mu = \int\limits_E z f d\mu = \operatorname{Re}\left(\int\limits_E z f d\mu\right) = \int\limits_E \operatorname{Re}(zf)\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E |\operatorname{Re}(zf)|\, d\mu.$$

Ввиду того, что $|\operatorname{Re}(zf)(x)| \leqslant |(zf)(x)|$ $(x \in E)$, имеем

$$\left| \int\limits_E f d\mu \right| \leqslant \int\limits_E |zf|\, d\mu = \int\limits_E |z| \cdot |f|\, d\mu = \int\limits_E |f|\, d\mu,$$

и теорема доказана.

§ 4. Предельный переход под знаком интеграла

В этом параграфе мы будем изучать зависимость величины интеграла от подынтегральной функции. Нас будет интересовать следующий вопрос: пусть две функции f и g, имеющие интеграл по множеству E относительно меры μ, близки друг к другу (в некотором смысле слова, подлежащем, разумеется, уточнению); можно ли утверждать, что и интегралы $\int\limits_E f d\mu$ и $\int\limits_E g d\mu$ близки?

Этот же вопрос можно поставить и так: если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих интеграл по множеству E, в том или ином смысле сходится к функции f, то верно ли, что последовательность $\left\{\int\limits_E f_n d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к интегралу $\int\limits_E f d\mu$? Так возникает задача о предельном переходе под знаком интеграла.

Вопрос о предельном переходе под знаком интеграла представляет собой частный случай одного из важнейших вопросов математики — о возможности изменения порядка тех или иных математических операций. В данном случае речь идет об операциях интегрирования и предельного перехода.

На протяжении этого параграфа по-прежнему предполагается фиксированной полная мера μ, заданная на σ-кольце $\mathfrak{M}$.

4.1. Уточним прежде всего постановку задачи о предельном переходе под знаком интеграла.

Определение 1. Рассмотрим множество $E \in \mathfrak{M}$. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, каждая из которых определена во всяком случае на почти всем E. Предположим, что f — такая же функция. Если выполнены условия: 1) существуют интегралы $\int\limits_E f_n d\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\int\limits_E f d\mu$; 2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E f d\mu$, то говорят, что для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f *возможен предельный переход* под знаком интеграла (по множеству E).

Разумеется, если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функция f никак не связаны между собой, возможность предельного перехода под знаком интеграла трудно предвидеть. Обычно связь между f и последовательностью $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ осуществляется требованием, чтобы последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в том или ином (но всякий раз в точно определенном) смысле сходилась к f. Именно в этой ситуации и оправдывается термин „предельный переход под знаком интеграла“, поскольку вычисление предела $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu$ заменяется нахождением интеграла $\int\limits_E f d\mu$ от предельной функции f.

Ниже мы ограничимся исключительно случаем, когда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для почти всех $x \in E$. Следует иметь в виду, что даже в этом простейшем случае предельный переход под знаком интеграла далеко не всегда возможен.

Пусть, например, μ_1 — мера Лебега на числовой прямой, $E = (0,1)$,

$$f_n : f_n(x) = n^2 e^{-nx} \, (x \in E;\ n = 1, 2, \ldots);\ f : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ (x \in E).$$

Тогда $\int\limits_E f_n d\mu_1 = \int\limits_0^1 n^2 e^{-nx} dx = n(1-e^{-n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Между тем $\int\limits_E f d\mu_1 = 0$.

4.2. Первая теорема о предельном переходе под знаком интеграла относится к тому случаю, когда последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна.

Лемма. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Предположим, что имеется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ вещественных функций и функция f, каждая из которых задана по крайней мере на множестве E. Если выполнены условия:*

1) *функции f_n $(n=1, 2, \ldots)$ суммируемы на множестве E, причем $I = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \int\limits_E f_n d\mu < +\infty$;*

2) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$ $(x \in E)$;

3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$,

то функция f конечна почти на всем множестве E.

Доказательство. Рассмотрим множества e_n^k

$$e_n^k = \{x \in E : f_n(x) > k\} \quad (n,\ k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку функции f_n измеримы на множестве E, то $e_n^k \in \mathfrak{M}$ $(n,\ k=1, 2, \ldots)$. Поэтому (теоремы 2(2.II) и 3(2.II)) на основании условия 1)

$$I \geqslant \int\limits_E f_n d\mu \geqslant \int\limits_{e_n^k} f_n d\mu \geqslant k\mu e_n^k \quad (n,\ k=1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\mu e_n^k \leqslant \frac{I}{k} \quad (n,\ k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Используя условие 2), заметим, что $e_1^k \subset e_2^k \subset \ldots \subset e_n^k \subset \ldots$ $(k=1, 2, \ldots)$, причем объединение $e^k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n^k = \{x \in E : f(x) > k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Применяя теорему 3(2.I), находим с помощью (1)

$$\mu e^k = \lim_{n\to\infty} \mu e_n^k \leqslant \frac{I}{k} \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Так как $\{x \in E : f(x) = +\infty\} \subset e^k$ $(k=1, 2, \ldots)$, то согласно (2)

$$\mu\{x \in E : f(x) = +\infty\} \leqslant \frac{I}{k} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

т. е. $\mu\{x \in E : f(x) = +\infty\} = 0$.

Лемма доказана.

Теорема 1 (4.II) (Б. Леви). *Пусть имеется множество $E \in \mathfrak{M}$, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ вещественных функций и, также вещественная функция f. Предположим, что соблюдены условия:*

1) *функции f и f_n $(n=1, 2, \ldots)$ определены по крайней мере на множестве E;*

2) *существуют интегралы $\int\limits_E f_n d\mu > -\infty$ $(n=1, 2, \ldots)$;*

3) $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$ $(x \in E)$;

4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in E)$.

Тогда для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f возможен предельный переход под знаком интеграла (по множеству E).

Доказательство. Последовательность $\left\{\int\limits_E f_n d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ будет в силу условий 2) и 3) возрастающей (п. 3.10, предл. 2). Поэтому существует предел $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \int\limits_E f_n d\mu$. Функции f_n $(n=1, 2, \ldots)$ измеримы на E, а тогда на основании теоремы 2 (3.II) ввиду условия 4) измерима на E и функция f. Поскольку $f(x) \geqslant f_n(x)$ $(x \in E;\ n=1, 2, \ldots)$, то согласно предложению 2 из гл. II, п. 3.10 условие 2) обеспечивает существование интеграла $\int\limits_E f d\mu$ и неравенство $\int\limits_E f d\mu \geqslant \int\limits_E f_n d\mu$ $(n=1, 2, \ldots)$, так что $\int\limits_E f d\mu \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu = I$. Если $I = +\infty$, последнее неравенство превращается в равенство, составляющее утверждение теоремы.

Рассмотрим случай $I < +\infty$.

Если возможность предельного перехода под знаком интеграла будет установлена для последовательности $\{f_n - f_1\}_{n=1}^{\infty}$ и функции $f - f_1$, то

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E f_1 d\mu + \int\limits_E (f - f_1)\, d\mu = \int\limits_E f_1 d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_E (f_n - f_1)\, d\mu = \\ = \lim \int\limits_E f_n d\mu,$$

следовательно, предельный переход будет допустим также для данной последовательности и данной функции. Но функции $f_n - f_1$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $f - f_1$, удовлетворяя всем условиям теоремы, обладают еще и тем свойством, что они не принимают на множестве E отрицательных значений. Таким образом, можно считать, что сами функции f_n обладают упомянутым свойством, т. е. что $f_n(x) \geqslant 0$ $(x \in E;\ n=1, 2, \ldots)$. Ясно, что при этом выполнены все условия предыдущей леммы, так что функция f будет конечной на почти всем множестве E. Удаляя из E множество $e=\{x\in E: f(x)=+\infty\}$, имеющее нулевую меру, мы добьемся того, что на $E\setminus e$ функция f и тем более все функции f_n $(n=1, 2, \ldots)$ будут конечными. Так как равенства $\int\limits_E f d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n d\mu$ и $\int\limits_{E\setminus e} f d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{E\setminus e} f_n d\mu$ эквивалентны, то отмеченное обстоятельство позволяет считать функции f и f_n $(n=1, 2, \ldots)$ конечными на самом множестве E.

Итак, пусть $I<+\infty$, а f и f_n $(n=1, 2, \ldots)$ неотрицательны и всюду конечны на множестве E.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mu E<+\infty$.

Возьмем число $\sigma>0$ и введем множества

$$E_n(\sigma)=\{x\in E: f(x)-f_n(x)<\sigma\} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

и функции φ_n $(n=1, 2, \ldots)$:

$$\varphi_n(x)=f_n(x)+\sigma \quad (x\in E;\ n=1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что

$$\int\limits_E \varphi_n d\mu=\int\limits_E f_n d\mu+\sigma\mu E\leqslant I+\sigma\mu E<+\infty \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Множества $E_n(\sigma)$ измеримы $(n=1, 2, \ldots)$, и $f(x)\leqslant\varphi_n(x)$ $(x\in E_n(\sigma);\ n=1, 2, \ldots)$, поэтому в силу (3) существует конечный интеграл $\int\limits_{E_n(\sigma)} f d\mu$ (п. 3.10, предл. 2), причем опять на основании (3)

$$\int\limits_{E_n(\sigma)} f d\mu\leqslant\int\limits_{E_n(\sigma)}\varphi_n d\mu\leqslant\int\limits_E \varphi_n d\mu\leqslant I+\sigma\mu E \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Условие 4) теоремы вместе с предположением о конечности функций f_n $(n=1, 2, \ldots)$ и f обеспечивает соотношение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(\sigma)=E,$$

а из условия 3) вытекает, что последовательность $\{E_n(\sigma)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая. Учитывая еще неотрицательность функции f, можем воспользоваться результатом предложения 4 из гл. II, п. 3.10, что приводит к оценке

$$\int\limits_E f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_n(\sigma)} f d\mu\leqslant I+\sigma\mu E,$$

которая вследствие произвольности σ и конечности μE равносильна неравенству $\int\limits_E f d\mu\leqslant I$. Противоположное неравенство установлено выше в общем случае. Стало быть,

$$\int\limits_E f d\mu=I=\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n d\mu.$$

Пусть теперь $\mu E = +\infty$. В силу σ-конечности меры μ (см. гл. I, п. 2.4) найдется такая последовательность $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ множеств, входящих в σ-кольцо $\mathfrak{M}$, что

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m, \quad \mu E_m < +\infty \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что можно считать последовательность $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ возрастающей, так как в противном случае мы заменим каждое множество E_m объединением $\bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Ввиду того, что $\mu E_m < +\infty$, для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f возможен предельный переход под знаком интеграла по множеству E_m. Это значит, что

$$\int_{E_m} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_m} f_n d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E} f_n d\mu = I.$$

Опять применяя предложение 4 из гл. II, п. 3.10 (на этот раз к последовательности $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$), заключаем на основании последнего неравенства, что

$$\int_{E} f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f d\mu \leqslant I,$$

а это, как и выше, означает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичная теорема справедлива для монотонно убывающих последовательностей. Условия 2) заменяются при этом требованием $\int\limits_{E} f_n d\mu < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Замечание 2. Полнота меры μ была использована в доказательстве теоремы только для того, чтобы можно было утверждать измеримость функций f_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Если это предположение включить в число условий теоремы, то требование полноты меры становится излишним.

Замечание 3. Как очевидно, заключение теоремы останется справедливым, если условия 1), 3) и 4) будут выполняться лишь почти везде на множестве E.

Применительно к функциональным рядам теорема Б. Леви приводит к такому результату.

Следствие 1. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность измеримых на множестве* E $(E \in \mathfrak{M})$ *и неотрицательных (на* E*) функций, и функция* f *такова, что* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ $(x \in E)$.

Тогда $\int\limits_{E} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E} \varphi_n d\mu$.

Доказательство. Принимая

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\quad (x\in E;\ n=1,\ 2,\ \ldots),$$

мы построим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, которая вместе с функцией f удовлетворяет всем условиям теоремы. Это значит, что

$$\int_E f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E \varphi_k d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E \varphi_k d\mu.$$

Вместо рядов можно рассматривать произвольные (не более чем счетные) семейства.

Следствие 2. *Пусть* $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — *не более чем счетное семейство функций, измеримых на множестве* E $(E\in\mathfrak{M})$ *и неотрицательных на множестве* E. *Если* f — *такая функция, что* $f(x)=\sum_{\xi\in\Xi}\varphi_\xi(x)$ $(x\in E)$, *то существует* $\int_E f d\mu$, *причем*

$$\int_E f d\mu=\sum_{\xi\in\Xi}\int_E \varphi_\xi d\mu. \qquad (5)$$

Доказательство. Если Ξ — конечное множество, то справедливость (5) вытекает из предложения 3 (гл. II, п. 3.10). Пусть Ξ — бесконечно. Тогда существует взаимно однозначное отображение ω множества $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел на множество Ξ. При этом вследствие неотрицательности функций φ_ξ $(\xi\in\Xi)$ (см. предл. 5 (д. 2, п. 4) и предл. 1 (д. 2, п. 5))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{\omega(n)}(x)=\sum_{n\in\mathbf{N}}\varphi_{\omega(n)}(x)=\sum_{\xi\in\Xi}\varphi_\xi(x)=f(x)\quad (x\in E),$$

и по тем же причинам

$$\sum_{\xi\in\Xi}\int_E \varphi_\xi d\mu=\sum_{n\in\mathbf{N}}\int_E \varphi_{\omega(n)}d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E \varphi_{\omega(n)}d\mu.$$

Остается воспользоваться результатом следствия 1.

Приведем еще одно во многих случаях полезное утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — *не более чем счетное семейство измеримых на множестве* E $(E\in\mathfrak{M})$ *и неотрицательных на* E *функций.*

Если семейство $\left\{\int_E \varphi_\xi d\mu\right\}$ $(\xi\in\Xi)$ *суммируемо, т. е. если* $\sum_{\xi\in\Xi}\int_E \varphi_\xi d\mu<+\infty$, *то для почти всех* $x\in E$ *суммируемо семейство* $\{\varphi_\xi(x)\}$ $(\xi\in\Xi)$, *иными словами,* $\sum_{\xi\in\Xi}\varphi_\xi(x)<+\infty$ *для почти всех* $x\in E$.

Доказательство. Введем функцию f, полагая $f(x) = \sum_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(x)$ $(x \in E)$. На основании следствия 2 $\int_E f d\mu = \sum_{\xi \in \Xi} \int_E \varphi_\xi d\mu < +\infty$. Значит, f суммируема на множестве E и тем самым почти на всем E конечна (теорема 1 (2.II)).

Замечание 4. Соображения, аналогичные тем, которые упоминались в замечании 3, можно высказать и по отношению к следствиям 1, 2 и 3.

4.3. Следующая ниже теорема, не являясь, строго говоря, теоремой о предельном переходе под знаком интеграла, примыкает, однако, к этому кругу вопросов.

Теорема 2 (4.II) (Фату). *Пусть последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *функция* f_0 *и множество* E $(E \in \mathfrak{M})$ *обладают следующими свойствами:*

1) f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *и* f_0 *определены по крайней мере на множестве* E;

2) *при каждом* n $(n = 1, 2, \ldots)$ *функция* f_n *измерима на множестве* E;

3) *существует суммируемая на* E *функция* Ψ, *такая, что*
$$f_n(x) \geqslant \Psi(x) \quad (x \in E;\ n = 1, 2, \ldots);$$

4) $f_0(x) = \varliminf_{n \to \infty} f_n(x)$.

Тогда существуют интегралы $\int_E f_0 d\mu$, $\int_E f_n d\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и справедлива оценка*
$$\int_E f_0 d\mu \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu. \tag{6}$$

Доказательство. Существование интегралов $\int_E f_n d\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вытекает на основании предл. 2 п. 3.10 из условий 2) и 3).

Введем функции g_n, принимая
$$g_n(x) = \inf_{p \in \mathrm{N}} f_{n+p-1}(x) \quad (x \in E;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Эти функции измеримы на E (теорема 2 (3.II)) и, поскольку, очевидно, $g_n(x) \geqslant \Psi(x)$ $(x \in E;\ n = 1, 2, \ldots)$, имеют интегралы, причем $\int_E g_n d\mu \geqslant \int_E \Psi d\mu > -\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Условие 4) дает, кроме того, $f_0(x) = \varliminf_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ $(x \in E)$. Так как последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, то для нее и функции f_0 выполнены все условия теоремы Б. Леви. Значит, существует интеграл $\int_E f_0 d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n d\mu$. Но в силу (7) $g_n(x) \leqslant$

$\leqslant f_n(x)$ $(x \in E;\ n=1, 2, \ldots)$. Следовательно (п. 3.10 предл. 2), $\int\limits_E g_n d\mu \leqslant \int\limits_E f_n d\mu$ $(n=1, 2, \ldots)$ и, тем более, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_E g_n d\mu \leqslant$ $\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu$, что вместе с доказанным ранее приводит к (6).

Если в условии 4) заменить нижний предел верхним, то формулировка теоремы несколько изменится.

Следствие. *Пусть последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *функция* $f^{(0)}$ *и множество* E $(E \in \mathfrak{M})$ *обладают следующими свойствами:*

1) *функции* $f^{(0)}$ *и* f_n $(n=1, 2, \ldots)$ *заданы по крайней мере на множестве* E;

2) *при каждом* n $(n=1, 2, \ldots)$ *функция* f_n *измерима на множестве* E;

3) *существует суммируемая на множестве* E *функция* Φ, *такая, что*

$$f_n(x) \leqslant \Phi(x) \quad (x \in E;\ n=1, 2, \ldots);$$

4) $f^{(0)}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ $(x \in E)$.

Тогда существуют интегралы $\int\limits_E f^{(0)} d\mu$ *и* $\int\limits_E f_n d\mu$ $(n=1, 2, \ldots)$ *и справедлива оценка*

$$\int\limits_E f^{(0)} d\mu \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_E f_n d\mu. \tag{8}$$

Доказательство. Примем

$$\tilde{f}_n = -f_n \quad (n=1, 2, \ldots), \ \tilde{f}_0 = -f^{(0)}, \ \Psi = -\Phi.$$

Легко проверить, что последовательность $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$, функции $\tilde{f}_0$ и Ψ удовлетворяют всем условиям теоремы. Например,

$$\tilde{f}_0(x) = -f^{(0)}(x) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} [-f_n(x)] = \underline{\lim}_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \quad (x \in E).$$

Отсюда получаем, что нужные интегралы существуют и

$$\int\limits_E f^{(0)} d\mu = -\int\limits_E \tilde{f}_0 d\mu \geqslant -\underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_E \tilde{f}_n d\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_E f_n d\mu.$$

Замечание 1. Если функции f_n $(n=1, 2, \ldots)$ и f_0 неотрицательны на множестве E и удовлетворяют условиям 1), 2) и 4) теоремы, то справедливо неравенство (6).

Доказательство. В этом случае будет выполнено также и условие 3), так как в качестве Ψ можно взять функцию, равную нулю на множестве E.

Замечание 2. Утверждения теоремы и следствия останутся верными, если ослабить условия 1), 3) и 4), потребовав их выполнения лишь для почти всех элементов множества E.

4.4. Следующая ниже теорема о предельном переходе под знаком интеграла была исторически первой теоремой такого рода (если иметь в виду современное понимание интеграла). Простота ее условий, сочетающаяся с большой общностью, безусловно сыграла заметную роль в упрочении современной концепции интеграла.

Теорема 3 (4.II) (Лебег). *Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплекснозначных функций, комплекснозначная функция f и множество E ($E \in \mathfrak{M}$) обладают свойствами:*

1) *функции f и f_n ($n=1, 2, \ldots$) определены по крайней мере на множестве E;*

2) *при каждом n ($n=1, 2, \ldots$) функция f_n измерима на множестве E;*

3) *существует такая суммируемая на множестве E функция Φ, что*

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x) \quad (x \in E;\ n=1, 2, \ldots);$$

4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E).$

Тогда для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f возможен предельный переход под знаком интеграла по множеству E.

Доказательство. Предположим сначала, что функции f_n ($n=1, 2, \ldots$) вещественны.

Полагая $\Psi = -\Phi$, запишем условие 3) теоремы в виде

$$f_n(x) \geqslant \Psi(x),\ f_n(x) \leqslant \Phi(x) \quad (x \in E;\ n=1, 2, \ldots).$$

Если принять еще $f_0 = f^{(0)} = f$, то будут выполнены все условия как самой теоремы 2, так и следствия к ней. Следовательно, существуют интегралы $\int\limits_E f d\mu$, $\int\limits_E f_n d\mu$ ($n=1, 2, \ldots$) и справедливы неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu \geqslant \int\limits_E f d\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu. \tag{8a}$$

Но нижний предел числовой последовательности не может превосходить верхнего предела. Таким образом, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f d\mu$, а это означает, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu$, равный общему значению верхнего и нижнего пределов. Учитывая сказанное, заключаем на основании (8а), что $\int\limits_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu$. Случай, когда функции f_n ($n=1, 2, \ldots$)

могут иметь невещественные значения, исчерпывается рассмотрением по отдельности последовательностей вещественных и мнимых частей. В силу самого определения (п. 3.11) эти, уже вещественные, функции измеримы и, как нетрудно понять, удовлетворяют всем остальным требованиям теоремы.

Теорема доказана.

Во многих случаях для применений достаточно более простое утверждение, формулировке которого предпошлем определение.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, заданных по крайней мере на множестве $E\,(E \subset R^{\nu})$, равномерно ограничена на множестве E, если существует такое конечное число M, что $|f_n(x)| \leqslant M$ $(x \in E;\ n=1, 2, \ldots)$.

Следствие. *Пусть имеется последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функций и функция* f, *заданные по крайней мере на множестве* $E \in \mathfrak{M}$, *причем* $\mu E < +\infty$. *Если функции* f_n $(n=1, 2, \ldots)$ *измеримы на множестве* E, *последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена на* E *и* $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ $(x \in E)$, *то для последовательности* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и функции* f *возможен предельный переход под знаком интеграла.*

Доказательство. Надо применить теорему, взяв в качестве Φ функцию, определенную на множестве E равенством $\Phi(x) = M$ $(x \in E)$, где M — общая граница на множестве E функций последовательности. Функция Φ суммируема, потому что $\int\limits_E \Phi\, d\mu = M\mu E < +\infty$.

Замечание 1. В условиях теоремы и тем более в условиях следствия функции f_n $(n=1, 2, \ldots)$ и f суммируемы на множестве E.

Доказательство. Для функции f_n это с помощью теоремы 6 (3.II) вытекает из условий 2) и 3). Поскольку на основании теоремы 2 (2.II) $\left|\int\limits_E f_n\, d\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f_n|\, d\mu \leqslant \int\limits_E \Phi\, d\mu$ $(n=1, 2, \ldots)$, то и $\left|\int\limits_E f\, d\mu\right| \leqslant \int\limits_E \Phi\, d\mu < +\infty$. Стало быть, суммируема и функция f.

Замечание 2. Как и в предыдущих теоремах этого параграфа, для справедливости заключения теоремы достаточно проверить выполнение условий 1), 3) и 4) только для почти всех элементов множества E.

Проиллюстрируем теорему 3 примером.

Рассмотрим промежуток Δ числовой прямой, содержащий промежуток $[0,1]$; предположим, кроме того, что число 1 не является правым концом промежутка Δ. Пусть g — возрастающая непрерывная слева функция, определенная на Δ. Под μ будем понимать меру Стилтьеса, порожденную функцией g (см. гл. I, п. 3.7 и гл. I, п. 2.6). Пусть далее f — конечная функция, заданная по крайней мере на $[0,1]$ и суммируемая на $[0,1]$ относительно меры μ. Определим функции f_n ($n=1, 2, \ldots$), полагая

$$f_n(x)=x^n f(x) \quad (x\in[0,1];\ n=1, 2, \ldots).$$

Функции f_n ($n=1, 2, \ldots$) измеримы на $[0,1]$ (следствие 2 к теореме 3 (3.II)), а так как $|f_n(x)|\leqslant|f(x)|$ ($x\in[0, 1]$; $n=1, 2, \ldots$), то, согласно теореме 6 (3.II), f_n суммируемы.

Интегралы $I_n=\int\limits_{[0,1]} f_n d\mu$ ($n=1, 2, \ldots$) называются *моментами функции* f (относительно меры μ). Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} I_n=f(1)\,[g(1+0)-g(1)].$$

Положим

$$f_0(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1,\\ f(1), & x=1\end{cases} \qquad (x\in[0, 1]).$$

Применяя к последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f_0 теорему Лебега (в качестве Φ берем $|f|$), получим

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]} f_n d\mu=\int\limits_{[0,1]} f_0 d\mu=\int\limits_{[0,1)} f_0 d\mu+\int\limits_{[1,1]} f_0 d\mu=$$
$$=f_0(1)\,\mu\,[1,1].$$

Но $f_0(1)=f(1)$, а

$$\mu\,[1,1]=\lim_{n\to\infty}\mu\left[1,1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g(1)\right]=$$
$$=g(1+0)-g(1).$$

4.5. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла является частным случаем более общего факта, доказательство которого опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность неотрицательных функций, заданных по крайней мере на множестве* E ($E\in\mathfrak{M}$). *Предположим, кроме того, что*

1) φ_n ($n=1, 2, \ldots$) *измеримы на множестве* E;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$ ($x\in E$).

Тогда если $\mu E<+\infty$, *то, каково бы ни было число* $\sigma>0$,

$$\mu\,\{x\in E:\varphi_n(x)\geqslant\sigma\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим $e_n=\{x\in E:\varphi_n(x)\geqslant\sigma\}$ ($n=1, 2, \ldots$). Условие 1) гарантирует включение $e_n\in\mathfrak{M}$ ($n=1, 2, \ldots$), так что левая часть в (9) во всяком случае имеет смысл.

Предположим сначала, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая для каждого $x \in E$. В этом случае множества e_n $(n=1, 2, \ldots)$ образуют, очевидно, убывающую последовательность, причем на основании условия 2)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : \varphi_n(x) \geqslant \sigma\} = \left\{x \in E : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \geqslant \sigma\right\} = \Lambda.$$

Поскольку, как отмечалось, множества e_n принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{M}$ $(n=1, 2, \ldots)$, утверждение (9) вытекает из сказанного выше с помощью пункта б) теоремы 3(2.I).

Рассмотрим теперь общий случай. Введем функции ψ_n, полагая

$$\psi_n(x) = \sup_{p \in \mathbf{N}} \varphi_{n+p}(x) \quad (x \in E;\ n=1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям леммы (см. теорему 2(3.II)). Кроме того, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность. Следовательно, по доказанному,

$$\mu\{x \in E : \psi_n(x) \geqslant \sigma\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{10}$$

Но ввиду того, что $\varphi_n(x) \leqslant \psi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots;\ x \in E)$, имеет место включение

$$e_n = \{x \in E : \varphi_n(x) \geqslant \sigma\} \subset \{x \in E : \psi_n(x) \geqslant \sigma\} \quad (n=1,2,\ldots).$$

На основании монотонности меры μ (пункт а) теоремы 2(2.1)) отсюда получаем $\mu e_n \leqslant \mu\{x \in E : \psi_n(x) \geqslant \sigma\}$ $(n=1,2,\ldots)$, что с помощью (10) приводит к искомому результату.

Лемма полностью доказана.

Определение 1. Рассмотрим последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, каждая из которых задана по крайней мере на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$. Предположим, что f_n $(n=1,2,\ldots)$ суммируемы на множестве E. Будем говорить, что функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ имеют на множестве E *равностепенно абсолютно непрерывные* интегралы, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать число $\delta > 0$ так, что

для любого множества e, удовлетворяющего условиям: $e \in \mathfrak{M}_E$, $\mu e \leqslant \delta$, и для любого n $(n=1,2,\ldots)$ (11)

справедливо неравенство $\int\limits_e |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$.

Заметим, что согласно теореме 3(2.II) по числу $\varepsilon > 0$ можно найти последовательность $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, такую, что для каждого n $(n=1,2,\ldots)$ верно следующее:

* Это определение можно очевидным образом модифицировать так, чтобы оно имело смысл применительно к любому семейству $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ функций, заданных по крайней мере на множестве E.

$$\left.\begin{array}{l}\text{для любого множества } e\ (e \in \mathfrak{M}_E), \text{ такого, что} \\ \mu e \leqslant \delta_n, \text{ справедливо неравенство } \int\limits_e |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon.\end{array}\right\} \quad (12)$$

Если при этом $\inf\limits_{n \in \mathrm{N}} \delta_n > 0$, то, принимая $\delta = \inf\limits_{n \in \mathrm{N}} \delta_n$, мы, очевидно, удовлетворим условию (11). Однако может случиться, что при любом выборе δ_n, удовлетворяющих требованиям (12), оказывается $\inf\limits_{n \in \mathrm{N}} \delta_n = 0$. Это означает, очевидно, что указать $\delta > 0$, которое годилось бы в (11), невозможно.

Проиллюстрируем сказанное примером. Будем под μ_1 понимать, как всегда, меру Лебега размерности единица. В качестве множества E примем промежуток $[0,1]$, а за f_n возьмем функции, определенные на множестве E следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{n} < x \leqslant 1\right) \end{cases} \qquad (x \in E;\ n = 1,2,\ldots).$$

Выберем положительное число $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Так как

$$\int\limits_{\left[0,\, \frac{1}{n}\right]} f_n\, d\mu_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 x)\, dx = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad (n = 1,2,\ldots), \quad (13)$$

то удовлетворяющее (12) число δ_n должно быть меньше $\frac{1}{n}$ (в противном случае в (12) можно было бы положить $e = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, поскольку $\mu e = \mu\left[0, \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n} \leqslant \delta_n$; это привело бы к неравенству $\int\limits_{\left[0,\, \frac{1}{n}\right]} f_n\, d\mu \leqslant \varepsilon$, которое противоречит (13)). Таким образом, в данном случае как раз $\inf\limits_{n \in \mathrm{N}} \delta_n = 0$ и, следовательно, функции f_n $(n = 1,2,\ldots)$ не имеют равностепенно абсолютных непрерывных интегралов на множестве E.

Введенное только что понятие равностепенной абсолютной непрерывности играет существенную роль в следующей теореме.

Теорема 4 (4.II) (Витали). *Пусть f_n $(n = 1,2,\ldots)$ и f — функции, заданные по крайней мере на множестве $E\,(E \in \mathfrak{M})$. Предположим, что выполнены условия*

1) *функции f_n $(n = 1,2,\ldots)$ и f суммируемы на множестве E;*

2) *функции* f_n $(n=1,2,\ldots)$ *имеют на множестве* E *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы;*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ $(x\in E)$.

Тогда если $\mu E<+\infty$, *то для последовательности* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и функции* f *возможен предельный переход под знаком интеграла по множеству* E.

Доказательство. Поскольку все функции f_n $(n=1,2\ldots)$ и функция f суммируемы на множестве E, то они почти везде на E конечны (теорема 1 (2.II)). Так как удаление из E множества меры нуль не влияет на величину интеграла и не нарушает условий теоремы, можно считать, что на множестве E функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ и f конечны.

Действительно, пусть

$$A_n=\{x\in E: |f_n(x)|=+\infty\};$$
$$A=\{x\in E: |f(x)|=+\infty\}.$$

По теореме 1 (2.II), $\mu A_n=\mu A=0$, и потому (предл. 1 и 2 из гл. 1, п. 3.3)

$$\mu\left(A\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0.$$

Но если $x\in E\diagdown\left(A\cup\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$, то все числа $f(x), f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ конечны.

На основании теоремы 2 (2.II)*

$$\left|\int_E f_n d\mu-\int_E f d\mu\right|=\left|\int_E (f_n-f)\,d\mu\right|\leqslant\int_E |f_n-f|\,d\mu \quad (n=1,2,\ldots).$$

Поэтому достаточно доказать, что $\int\limits_E |f_n-f|\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, т. е. если ввести функции $\varphi_n:\varphi_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$ $(x\in E;\ n=1,2,\ldots)$, что $\int\limits_E \varphi_n d\mu\to 0$. С этой целью заметим, что функции φ_n $(n=1,2,\ldots)$ имеют на E равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Действительно, если $e\in\mathfrak{M}_E$, то (теоремы 3 (2.II) и 2 (2.II))

$$\int_e \varphi_n d\mu=\int_e |f_n-f|\,d\mu\leqslant\int_e |f_n|\,d\mu+\int_e |f|\,d\mu \quad (n=1,2,\ldots). \tag{14}$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. По условию равностепенной абсолютной непрерывности интегралов функций f_n $(n=1,2,\ldots)$ можно подобрать число $\delta_1>0$ так, чтобы при

* Если функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ и f комплексные, надо воспользоваться еще результатом теоремы 8 (3.2).

любом множестве $e \in \mathfrak{M}_E$, удовлетворяющем неравенству $\mu e \leqslant \delta_1$, оказалось, что при всех n $(n=1,2,\ldots)$

$$\int\limits_e |f_n|\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

а на основании теоремы 3 (2.II) найдется число $\delta_2 > 0$, такое, что при любом $e \in \mathfrak{M}_E$, таком, что $\mu e \leqslant \delta_2$,

$$\int\limits_e |f|\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, получим на основании (14), что

$$\int\limits_e \varphi_n d\mu \leqslant \varepsilon \tag{15}$$

при любом $e \in \mathfrak{M}_E$, таком, что $\mu e \leqslant \delta$, и при всех n $(n=1,2,\ldots)$.

Пусть $\sigma = \frac{\varepsilon}{\mu E}$.* Введем множества

$e_n(\sigma) = \{x \in E : \varphi_n(x) \geqslant \sigma\}$, $E_n(\sigma) = \{x \in E : \varphi_n(x) < \sigma\}$ $(n=1,2,\ldots)$

Поскольку функции φ_n $(n=1,2,\ldots)$, будучи суммируемыми, измеримы (теорема 5 (3.II)) и ввиду условия 3) теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ $(x \in E)$ к последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ применима лемма. Следовательно, $\mu e_n(\sigma) \to 0$, так что можно указать такое число n_0, что $\mu e_n(\sigma) \leqslant \delta$ $(n \geqslant n_0)$. Тем самым в силу (15)

$$\int\limits_{e_n(\sigma)} \varphi_n d\mu \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant n_0). \tag{16}$$

Так как для $x \in E_n(\sigma)$ будет $\varphi_n(x) < \sigma$, то по теореме 2 (2.II)

$$\int\limits_{E_n(\sigma)} \varphi_n d\mu \leqslant \sigma \mu E_n(\sigma) \leqslant \sigma \mu E \quad (n=1,2,\ldots).$$

Складывая это с (16) и учитывая аддитивность интеграла (теорема 3 (2.II)), получим

$$\int\limits_E \varphi_n d\mu = \int\limits_{e_n(\sigma)} \varphi_n d\mu + \int\limits_{E_n(\sigma)} \varphi_n d\mu \leqslant \varepsilon + \sigma\mu E = 2\varepsilon \quad (n \geqslant n_0).$$

Итак, $\int\limits_E \varphi_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Понятно, что теорема сохраняет силу, если в условии 3) ограничиться требованием, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in E$.

Замечание 2. Условие суммируемости функции f может быть заменено условием ограниченности последовательности $\left\{\int\limits_E |f_n|\, d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$.

* Если $\mu E = 0$, то утверждение теоремы очевидно.

Доказательство. Если $M = \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} \int\limits_E |f_n| \, d\mu < +\infty$, то, по теореме Фату (см. п. 4.3), $\int\limits_E |f| \, d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E |f_n| \, d\mu \leqslant M < +\infty$, т. е. функция $|f|$ суммируема. Но ввиду условия 3) f измерима (теоремы 5(3.II) и 2(3.II)). Следовательно, в силу теоремы 6(3.II) f будет суммируемой.

Замечание 3. В ряде случаев предположение о суммируемости функции f может быть опущено совсем. Так можно поступить, например, тогда, когда мера μ обладает следующим свойством: каково бы ни было число $\delta > 0$, существует такое конечное семейство $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств из σ-кольца $\mathfrak{M}$, что $E = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$, $\mu E_\xi \leqslant \delta$ $(\xi \in \Xi)$.

Доказательство. Согласно условию 2), можно найти такое число $\delta > 0$, что

$$\int\limits_e |f_n| \, d\mu \leqslant 1$$

при любом $e \in \mathfrak{M}_E$, таком, что $\mu e \leqslant \delta$, и при всех n $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому, если семейство $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отвечает найденному δ, то, обозначая через m число элементов множества Ξ, будем иметь на основании теорем 3(2.II) и 2(2.I)

$$\int\limits_E |f_n| \, d\mu \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} \int\limits_{E_\xi} |f_n| \, d\mu \leqslant m \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

так что последовательность $\left\{\int\limits_E |f_n| \, d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

Заметим, что мера Лебега обладает указанным свойством, каково бы ни было измеримое множество E конечной лебеговой меры. Несложные рассуждения, необходимые для обоснования этого, предоставляем читателю.

Замечание 4. Условие равностепенной абсолютной непрерывности интегралов функций f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ является не только достаточным но и, в известном смысле, необходимым для возможности предельного перехода под знаком интеграла. Точнее говоря, используя более тонкие соображения, можно доказать, что если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функция f удовлетворяют условиям 1) и 3) теоремы, то в случае, когда для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f возможен предельный переход под знаком интеграла по любому множеству $e \in \mathfrak{M}_E$, функции f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ обладают равностепенно непрерывными интегралами на множестве E.

4.6. Из всех условий теоремы Витали наиболее неприятным для проверки является, безусловно, второе. Укажем в связи с этим некоторые признаки равностепенной абсолютной непрерывности интегралов функций f_n $(n=1,2,\ldots)$. Об этих функциях будем предполагать, что они заданы по крайней мере на множестве E $(E\in\mathfrak{M})$ и измеримы на нем.

Допустим, что существует функция Φ, определенная по крайней мере на E и суммируемая на этом множестве, причем

$$|f_n(x)|\leqslant\Phi(x)\quad(n=1,2,\ldots;\ x\in E). \tag{17}$$

Основываясь на результате теоремы 3(2.II), по числу $\varepsilon>0$ подберем число $\delta>0$ так, чтобы при любом $e\in\mathfrak{M}_E$, таком, что $\mu e\leqslant\delta$, выполнялось неравенство

$$\int\limits_e\Phi d\mu\leqslant\varepsilon.$$

В силу теоремы 6(3.II) неравенство (17) обеспечивает суммируемость на множестве E каждой из функций $|f_n|$ $(n=1,2,\ldots)$, и по теореме 2(2.II)

$$\int\limits_e|f_n|\,d\mu\leqslant\int\limits_e\Phi d\mu\leqslant\varepsilon$$

при всяком $e\in\mathfrak{M}_E$, таком, что $\mu e\leqslant\delta$, и при всех n $(n=1,2,\ldots)$. Таким образом, функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ обладают равностепенно абсолютно непрерывными интегралами на множестве E.

Использование найденного условия в теореме Витали не представляет большого интереса, так как замена в теореме Витали условия 2) этим критерием приводит к теореме Лебега, которая уже была доказана в п. 4.4 (причем без предположения о конечности μE). Значительно более интересным с этой точки зрения оказывается следующий признак равностепенной абсолютной непрерывности.

Лемма. *Пусть существует такое число $p>1$, что*

$$K=\sup_{n\in\mathbf{N}}\int\limits_E|f_n|^p d\mu<+\infty.$$

Тогда функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ обладают равностепенно абсолютно непрерывными интегралами на множестве E.

Доказательство. Пусть h — измеримая на множестве E функция, для которой $\int\limits_E|h|^p\,d\mu\leqslant K$. Взяв число $t>0$ и множество $e\in\mathfrak{M}_E$, положим

$$e_t=\{x\in e:|h(x)|\leqslant t\},\quad e^t=\{x\in e:|h(x)|>t\}.$$

Множества e_t, $e^t\in\mathfrak{M}$ не имеют общих элементов, и $e_t\cup e^t=e$. Поэтому (предл. 2 и 3 из гл. II, п. 3.10)

$$\int\limits_e|h|\,d\mu=\int\limits_{e_t}|h|\,d\mu+\int\limits_{e^t}|h|\,d\mu\leqslant t\mu e_t+\int\limits_{e^t}|h|\,d\mu\leqslant t\mu e+\int\limits_{e^t}|h|\,d\mu. \tag{18}$$

Но, очевидно, $t^{p-1}|h(x)| < |h(x)|^p$ $(x \in e^t)$. Следовательно, снова опираясь на указанные предложения, будем иметь

$$\int_{e^t} |h|\,d\mu = \frac{1}{t^{p-1}} \int_{e^t} t^{p-1}|h|\,d\mu \leqslant \frac{1}{t^{p-1}} \int_{e^t} |h|^p\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{t^{p-1}} \int_E |h|^p\,d\mu \leqslant \frac{K}{t^{p-1}}.$$

Подставляя это в (18), получим

$$\int_e |h|\,d\mu \leqslant t\mu e + \frac{K}{t^{p-1}}.$$

Предполагая, что $0 < \mu e < +\infty$, положим в последнем неравенстве $t = \frac{1}{[\mu e]^{\frac{1}{p}}}$. Это дает

$$\int_e |h|\,d\mu \leqslant (K+1)\,[\mu e]^{1-\frac{1}{p}}. \tag{19}$$

Заметим, что полученная оценка сохраняет силу и в тех случаях, когда $\mu e = 0$ или $\mu e = +\infty$, так что (19) справедливо для каждого множества $e \in \mathfrak{M}_E$.

Беря в (19) в качестве h любую из функций f_n $(n=1,2,\ldots)$, придем к неравенству

$$\int_e |f_n|\,d\mu \leqslant (K+1)\,[\mu e]^{1-\frac{1}{p}}, \tag{20}$$

верному при всех $e \in \mathfrak{M}_E$ и n $(n=1,2,\ldots)$. Отсюда очевидным образом и вытекает, что функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на множестве E, что и требовалось доказать.

Комбинируя только что установленный факт с теоремой Витали, получаем следующий результат.

Теорема 5(4.II). *Пусть f_n $(n=1,2,\ldots)$ и f функции, заданные по крайней мере на множестве E $(E \in \mathfrak{M})$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *функции f_n $(n=1,2,\ldots)$ измеримы на множестве E;*

2) *существует число $p > 1$, такое, что $K = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \int_E |f_n|^p\,d\mu < +\infty$;*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in E)$.

Тогда, если $\mu E < +\infty$, для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функции f возможен предельный переход под знаком интеграла по множеству E.

Доказательство. Достаточно проверить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функция f удовлетворяют всем условиям теоремы Витали (с учетом замечания 2 к ней).

Принимая в (20) $e=E$, можем написать

$$\int_E |f_n|\,d\mu \leqslant (K+1)\,[\mu E]^{1-\frac{1}{p}} \quad (n=1,2,\ldots),$$

откуда вытекает (с помощью теоремы 6 (3.II)) суммируемость функций f_n $(n=1,2,\ldots)$ и ограниченность последовательности $\left\{\int_E |f_n|\,d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Выполнение условия 2) теоремы Витали обеспечивается в силу леммы условием 2) настоящей теоремы. Условия 3) обеих теорем тождественны.

Интересные применения доказанных теорем будут даны в § 2 гл. III.

§ 5. Теорема Фубини

Пусть $P=[a_1, b_1)\times[a_2, b_2)\neq\Lambda$ — полуоткрытый прямоугольник размерности два. Значение $\mu_2 P$ меры Лебега μ_2 размерности два, т. е., проще говоря, площадь прямоугольника P определяется равенством

$$\mu_2 P=(b_1-a_1)(b_2-a_2)=\mu_1[a_1, b_1)\cdot\mu_1[a_2, b_2),$$

где через μ_1 обозначена мера Лебега размерности единица. Таким образом, мера μ_1 однозначно определяет значения меры μ_2 по крайней мере на полуоткрытых прямоугольниках и, следовательно, ввиду единственности лебеговского расширения (см. гл. I, п. 3.6 и гл. I, п. 3.7) и на всех остальных измеримых множествах. Однако выражение значения $\mu_2 E$ для произвольного измеримого множества E $(E\subset R^2)$ через значения меры μ_1 на тех или иных „одномерных“ множествах далеко не очевидно. В еще меньшей степени очевидно, как связан интеграл $\int_E f\,d\mu_2$ с интегралами по мере μ_1 (хотя сказанное выше достаточно убедительно свидетельствует о наличии такой связи). Выяснению указанных зависимостей и посвящен настоящий параграф.

Условимся об используемых обозначениях. Под μ^1, соответственно μ^2 мы будем понимать меру Лебега размерности ν_1 $(\nu_1=1, 2, \ldots)$ или, соответственно, ν_2 $(\nu_2=1, 2, \ldots)$. Через μ обозначим меру Лебега размерности $\nu=\nu_1+\nu_2$. Символы $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ и $\mathfrak{R}$ будут означать соответственно области определения мер μ^1, μ^2 и μ (см. гл. I, п. 3.8) (т. е. σ-алгебры $\mathfrak{M}^{\nu_1}$, $\mathfrak{M}^{\nu_2}$ и $\mathfrak{M}^{\nu}=\mathfrak{M}^{\nu_1+\nu_2}$).

5.1. Множество R^{ν} можно рассматривать как произведение множеств R^{ν_1} и R^{ν_2} (см. д. 1, п. 5). Это означает, что каждый элемент $z=(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)\in R^\nu$ мы рассматриваем как упорядоченную пару (x, y), где $x=(z_1, z_2, \ldots, z_{\nu_1})\in R^{\nu_1}$, $y=$ $=(z_{\nu_1+1}, z_{\nu_1+2}, \ldots, z_\nu)\in R^{\nu_2}$ $(\nu=\nu_1+\nu_2)$.

Напомним (см. д. 1, п. 5), что если $E\subset R^\nu=R^{\nu_1}\times R^{\nu_2}$ и $x\in R^{\nu_1}$, то множество $E^x=\{y\in R^{\nu_2}:(x, y)\in E\}$ называется *сечением множества E элементом x*. Аналогично, для любого $y\in R^{\nu_2}$ определяется сечение ${}^yE=\{x\in R^{\nu_1}:(x, y)\in E\}$. Как очевидно, соотношения $(x, y)\in E$, $x\in {}^yE$, $y\in E^x$ $(x\in R^{\nu_1}, y\in R^{\nu_2})$ равносильны.

Напомним еще, что множество $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}}E=\{x\in R^{\nu_1}:E^x\neq\Lambda\}$ называется (первой) *проекцией* множества $E\subset R^\nu$. Подобным же образом определяется *проекция* (вторая)

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}}E=\{y\in R^{\nu_2}:{}^yE\neq\Lambda\}.$$

Если множество $E\in\mathfrak{R}$, то его сечения E^x $(x\in R^{\nu_1})$ (это — подмножества множества R^{ν_2}) вовсе не обязательно входят в состав системы $\mathfrak{R}_2$. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (5.II). *Пусть $E\in\mathfrak{R}$.*

а) *Существует такое множество $e\subset R^{\nu_1}$, что $\mu^1e=0$, и для любого $x\in R^{\nu_1}\setminus e$ сечение E^x* входит в $\mathfrak{R}_2$.

б) *Обозначим через φ функцию, определенную на R^{ν_1}, равенством*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\mu^2E^x & (E^x\in\mathfrak{R}_2)\\ 0 & (E^x\,\overline{\in}\,\mathfrak{R}_2)\end{cases}\quad (x\in R^{\nu_1}). \tag{1}$$

Функция φ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{R}_1$ (см. определение 1 из п. 3.1), причем

$$\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi d\mu^1=\mu E. \tag{2}$$

Доказательство. Функцию φ, определенную на множестве R^{ν_1} равенством (1), будем называть *мерой сечений* множества E, а всякое множество e $(e\subset R^{\nu_1})$, обладающее тем свойством, что $E^x\in\mathfrak{R}_2$ для любого $x\in R^{\nu_1}\setminus e$, — *множеством особых сечений* (для E).

Обозначим через $\mathfrak{K}$ систему всех таких множеств F $(E\subset R^\nu)$, что 1) существует множество e особых сечений для E с $\mu^1e=0$ и 2) мера сечений φ множества E представляет собой измеримую (относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$) функцию. Так как φ, очевидно, неотрицательна, то существует интеграл

$$\lambda E=\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi d\mu^1\quad (E\in\mathfrak{K}).$$

Таким образом, можно говорить о заданной на системе $\mathfrak{K}$ функции множества λ.

В новых терминах теорему можно сформулировать так: $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{K}$ и $\mu E=\lambda E$ $(E\in\mathfrak{R})$, или, иными словами, функция λ служит распространением меры μ.

Поскольку мера μ является лебеговским расширением меры μ_0, заданной на системе $\mathfrak{P}^\nu$ всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν (см. гл. I, п. 3.7):

$$\mu_0 P = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \dots (\beta_\nu - \alpha_\nu) \quad (P = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2) \times \dots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu); \quad \alpha_k \leqslant \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \nu), \tag{3}$$

то для доказательства теоремы можно воспользоваться предложением 2 из гл. I, п. 3.7. Убедимся, что система множеств $\mathfrak{K}$ и функция λ удовлетворяют условиям этого предложения, т. е. условиям, о которых упоминалось в замечании 1 к теореме 5 (3.I).

Неотрицательность функции λ очевидна. Установим ее счетную аддитивность и одновременно проверим выполнение условия 1) замечания 1 к теореме 5 (3.I).

Пусть $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — не более, чем счетное семейство попарно не пересекающихся множеств системы $\mathfrak{K}$. Обозначим $E = \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Можно указать такое семейство $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ подмножеств множества R^{ν_1}, что

$$\mu^1 e_\xi = 0 \quad \text{и} \quad E_\xi^{(x)} \in \mathfrak{N}_2 \quad (x \in R^{\nu_1} \setminus e_\xi; \ \xi \in \Xi). \tag{4}$$

Положим $e = \bigcup_{\xi \in \Xi} e_\xi$. Согласно сказанному в гл. I, п. 3.3, $e \in \mathfrak{N}_1$ и $\mu^1 e = 0$, а так как для любого $x \in R^{\nu_1}$ сечение $E^x = \bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi^x$, то в случае, когда $x \overline{\in} e$, получаем на основании (4) $E^x \in \mathfrak{N}_2$. Таким образом, для множества E имеется множество e особых сечений, которое имеет нулевую меру.

Поскольку при любом данном $x \in R^{\nu_1}$ сечения E_ξ^x так же, как и сами множества E_ξ $(\xi \in \Xi)$, попарно не пересекаются, то при $x \overline{\in} e$ будет $\mu^2 E^x = \sum_{\xi \in \Xi} \mu^2 E_\xi^x$. Поэтому, обозначая через φ меру сечений множества E, а через φ_ξ — меру сечений множества E_ξ $(\xi \in \Xi)$, будем иметь

$$\varphi(x) = \sum_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(x) \quad (x \in R^{\nu_1} \setminus e), \tag{5}$$

так что если ψ — функция, определенная на R^{ν_1} равенством $\psi(x) = \sum_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(x)$ $(x \in R^{\nu_1})$, то φ и ψ совпадают на множестве $R^{\nu_1} \setminus e$, а ввиду того, что $\mu^1 e = 0$, это означает эквивалентность (относительно меры μ^1) функций φ и ψ. Вследствие того, что множество $E_\xi \in \mathfrak{K}$, функция φ_ξ измерима (относительно σ-кольца $\mathfrak{N}_1$) для любого $\xi \in \Xi$. Тем самым измерима и функция ψ (следствие 3 к теореме 3 (3.II)), а значит, и эквивалентная функция φ (гл. II, п. 3.1). Следовательно, множество E удовлетворяет обоим условиям определения системы $\mathfrak{K}$ и, стало быть, принадлежит этой системе. Основываясь на следствии 2 к теореме 1 (4.II), получаем в силу (5)

$$\lambda E = \int_{R^{\nu_1}} \varphi \, d\mu^1 = \int_{R^{\nu_1} \setminus e} \varphi \, d\mu^1 = \sum_{\xi \in \Xi} \int_{R^{\nu_1} \setminus e} \varphi_\xi \, d\mu^1 = \sum_{\xi \in \Xi} \int_{R^{\nu_1}} \varphi_\xi \, d\mu^1 = \sum_{\xi \in \Xi} \lambda E_\xi.$$

Докажем наличие у функции λ свойства полноты (см. гл. I, п. 3.6). Пусть $E \in \mathfrak{K}$, причем $\lambda E = 0$. Рассмотрим множество $E_0 \subset E$. Обозначим через φ и φ_0 меры сечений множества E и, соответственно, E_0. Поскольку $\lambda E = \int_{R^{\nu_1}} \varphi \, d\mu^1 = 0$ и функция φ неотрицательна, $\varphi(x) = 0$ для почти всех (относительно меры μ^1) $x \in R^{\nu_1}$ (см. замечание к лемме 1 из гл. II, п. 3.6). Пусть e_1 — множество из σ-кольца $\mathfrak{N}_1$, такое, что $\mu^1 e = 0$ и $\varphi(x) = 0$ $(x \in R^{\nu_1} \setminus e_1)$.

Подберем для E множество e особых сечений так, чтобы было $\mu^1 e=0$, и введем объединение $e_0=e\cup e_1$. Ясно, что $\mu^1 e_0=0$. Возьмем $x\in R^{\nu_1}$. Ввиду того, что $x\overline{\in} e$, $E^x\in\mathfrak{N}_2$, а поскольку $x\overline{\in} e_1$, будет $0=\varphi(x)=\mu^2 E^x$. Но $E_0^x\subset E^x$ и мера μ^2 — полная. Следовательно, $E_0^x\in\mathfrak{N}_2$. Это означает, что e_0 служит множеством особых сечений для E_0. Так как $\mu^2 E_0^x=0$ для $x\in R^{\nu_1}\setminus e_0$, то $\varphi_0(x)=0$ для указанных x, т. е. почти все значения функции φ_0 равны нулю, а тогда она измерима (гл. II, п. 3.1). Таким образом, доказано, что $E_0\in\mathfrak{K}$. Очевидно, $\lambda E_0=\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi_0 d\mu^1=0$.

Проверка условия 2) замечания 1 к теореме 5 (3.1) мало чем отличается по существу от проверки условия 1).

Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность множеств системы $\mathfrak{K}$. Предположим, что $\lambda E_n<+\infty$ $(n=1, 2, \ldots)$. Обозначим через E пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. Поскольку $E_n\in\mathfrak{K}$, можно подобрать такое множество e_n $(e_n\subset R^{\nu_1})$ — множество особых сечений для E_n — что $\mu^1 e_n=0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть $e=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n$ и $x\in R^{\nu_1}\setminus e$. Из того, что $E^x=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n^x$, и $E_n^x\in\mathfrak{N}_2$ $(n=1, 2, \ldots)$ (ведь x не принадлежит ни одному из множеств e_n), выводим: $E^x\in\mathfrak{N}_2$ (гл. I, п. 1.6). Отсюда следует, что e служит множеством особых сечений для E. При этом, как очевидно, $\mu^1 e=0$.

Обозначим через φ_n и соответственно через φ меры сечений множеств E_n $(n=1, 2, \ldots)$ и E. Так как $\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi_n d\mu^1=\lambda E_n<+\infty$, то функция φ_n $(n=1, 2, \ldots)$ суммируема на R^{ν_1} и, стало быть, почти везде (по отношению к мере μ^1) на R^{ν_1} конечна (теорема 1 (2.II)). Пусть e_n^1—такое множество, что

$$e_n^1\in\mathfrak{N}_1,\quad \mu^1 e_n^1=0,\quad \varphi_n(x)<+\infty\quad \left(x\in R^{\nu_1}\setminus e_n^1;\ n=1, 2, \ldots\right).$$

Если $e^1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n^1$, то $\mu^1 e^1=0$. Введем еще множество $e^0=e\cup e^1$. Понятно, что также и $\mu^1 e^0=0$. Рассмотрим $x\in R^{\nu_1}\setminus e^0$. Вследствие того, что $x\overline{\in} e_n$ и $x\overline{\in} e_n^1$ $(n=1, 2, \ldots)$,

$$E_n^x\in\mathfrak{N}_2,\quad \mu^2 E_n^x=\varphi_n(x)<+\infty\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Принимая во внимание, что последовательность $\left\{E_n^x\right\}_{n=1}^{\infty}$ сечений так же, как и сама последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, убывающая, получаем отсюда с помощью п. 2) теоремы 3 (2.I)

$$\varphi(x)=\mu^2 E^x=\lim_{n\to\infty}\mu^2 E_n^x=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

Поскольку числовая последовательность $\left\{\mu^2 E_n^x\right\}_{n=1}^{\infty}$, или, что то же, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—убывающая при любом $x\in R^{\nu_1}\setminus e^0$, мы можем применить теорему Б. Леви (гл. II, п. 4.2) в форме, предусмотренной замечаниями 1 и 3 к ней. Это обеспечивает существование интеграла $\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi d\mu^1$ и тем самым измеримость функции φ, что, в свою очередь, позволяет сделать вывод о включении $E\in\mathfrak{K}$. Далее, согласно цитированной теореме: $\lambda E=\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi d\mu^1=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi_n d\mu^1=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda E_n$.

Обратимся к условию 3) замечания 1 к теореме 5 (3.1). Пусть множества E, $E_0 \in \mathfrak{K}$, причем $E \supset E_0$, $\lambda E < +\infty$, $\lambda E_0 = 0$. Требуется доказать, что разность $F = E \setminus E_0 \in \mathfrak{K}$. Обозначим через e и e_0 такие множества особых сечений для E и соответственно для E_0, что $\mu^1 e = \mu^1 e_0 = 0$. Далее, введем функции φ, φ_0 и ψ — меры сечений для множеств E, E_0 и F. Как было установлено при проверке полноты функции λ, соотношение $\lambda E_0 = 0$ влечет равенство $\varphi_0(x) = 0$ для почти всех $x \in R^{\nu_1}$. Это значит, что существует множество $e^0 \in \mathfrak{R}_1$, такое, что $\mu^1 e^0 = 0$; $\varphi_0(x) = 0$ $\left(x \in R^{\nu_1} \setminus e_0\right)$. Таким образом, если $x \in R^{\nu_1} \setminus (e \cup e_0 \cup e^0)$, то $E^x \in \mathfrak{R}_2$, $E_0^x \in \mathfrak{R}_2$, $\mu^2 E_0^x = \varphi_0(x) = 0$. Следовательно, поскольку $F^x = E^x \setminus E_0^x$, то $F^x \in \mathfrak{R}_2$ и $\psi(x) = \mu^2 F^x = \mu^2 E^x - \mu^2 E_0^x = \varphi(x) - \varphi_0(x) = \varphi(x)$. Отсюда вытекает, во-первых, что объединение $e \cup e_0 \cup e^0$ является множеством особых сечений для F и, во-вторых, так как $\mu^1 (e \cup e_0 \cup e^0) = 0$, что функции ψ и φ эквивалентны относительно меры μ^1. Но φ — измеримая функция, поэтому будет измеримой и ψ (гл. II, п. 3.1).

Осталось убедиться в том, что λ служит распространением меры μ_0 (см. (3)). Рассмотрим произвольный прямоугольник $P = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2) \times \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu)$. Если $P = \Lambda$, то включение $P \in \mathfrak{K}$ и равенства $\lambda P = 0 = \mu_0 P$ очевидны, так что можно считать, что $P \neq \Lambda$. Наряду с прямоугольником P рассмотрим еще прямоугольники Q и T размерности ν_1 и ν_2 соответственно

$$Q = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2) \times \ldots \times [\alpha_{\nu_1}, \beta_{\nu_1}),$$
$$T = [\alpha_{\nu_1+1}, \beta_{\nu_1+1}) \times [\alpha_{\nu_1+2}, \beta_{\nu_1+2}) \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu). \tag{6}$$

Пусть $x \in R^{\nu_1}$, $y \in R^{\nu_2}$, $z = (x, y) \in R^\nu$. Как очевидно, элемент z тогда и только тогда принадлежит множеству P, когда $x \in Q$, $y \in T$. Но соотношение $(x, y) \in P$ равносильно включению $y \in P^x$. Поэтому из сказанного вытекает, что

$$P^x = \begin{cases} T & (x \in Q), \\ \Lambda & (x \overline{\in} Q) \end{cases} \quad (x \in R^{\nu_1}). \tag{7}$$

Таким образом, P^x при любом $x \in R^{\nu_1}$ является прямоугольником (размерности ν_2), и, следовательно, $P^x \in \mathfrak{R}_2$ $\left(x \in R^{\nu_1}\right)$, т. е. в качестве множества особых сечений для P можно взять пустое множество. Обозначая через φ меру сечений множества P, получим на основании (7)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mu^2 T & (x \in Q), \\ 0 & (x \overline{\in} Q) \end{cases} \quad (x \in R^{\nu_1}).$$

Функция φ, как видно отсюда, принимает два значения: одно — равное $\mu^2 T$ — на множестве Q, другое — нулевое — на $R^{\nu_1} \setminus Q$. Поскольку множества Q и $R^{\nu_1} \setminus Q \in \mathfrak{R}_1$, функция φ будет ступенчатой (гл. II, п. 3.1) и, значит, измеримой. Этим доказано включение $P \in \mathfrak{K}$.

Так как

$$\lambda P = \int\limits_{R^{\nu_1}} \varphi d\mu^1 = \int\limits_Q \varphi d\mu^1 + \int\limits_{R^{\nu_1} \setminus Q} \varphi d\mu^1 = \mu^2 T \cdot \mu^1 Q + 0 \cdot \mu^1 \left(R^{\nu_1} \setminus Q\right) = \mu^1 Q \cdot \mu^2 T,$$

а в силу (6)

$$\mu^1 Q = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (\beta_{\nu_1} - \alpha_{\nu_1}),$$
$$\mu^2 T = (\beta_{\nu_1+1} - \alpha_{\nu_1+1})(\beta_{\nu_1+2} - \alpha_{\nu_1+2}) \cdot \ldots \cdot (\beta_\nu - \alpha_\nu),$$

то на основании (3) $\lambda P = \mu_0 P$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Если вместо сечений E^x $\left(x \in R^{\nu_1}\right)$ брать сечения ${}^yE$ $\left(y \in R^{\nu_2}\right)$, то мы придем к следующей модификации теоремы: пусть $E \in \mathfrak{R}$; тогда 1) существует множество $e \in \mathfrak{R}_2$, такое, что

$$\mu^2 e = 0, \quad {}^yE \in \mathfrak{R}_1 \quad \left(y \in R^{\nu_2} \setminus e\right);$$

2) функция ψ, определенная на R^{ν_2} равенством

$$\psi(y)=\begin{cases}\mu^1({}^yE) & ({}^yE\in\mathfrak{R}_1),\\ 0 & ({}^yE\,\overline{\in}\,\mathfrak{R}_1)\end{cases}\quad (y\in R^{\nu_2}),$$

измерима (относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_2$) и

$$\mu E=\int\limits_{R^{\nu_2}}\psi d\mu_2.$$

Замечание 2. Предположим, что множество E $(E\in\mathfrak{R})$, о котором идет речь в теореме, имеет вид

$$E=A\times B,$$

где $A\in\mathfrak{R}_1$, $B\in\mathfrak{R}_2$. Тогда $\mu E=\mu^1A\cdot\mu^2B$.

Доказательство. Легко видеть, что $E^x\in\mathfrak{R}_2$ при всех $x\in R^{\nu_1}$, так как $E^x=B$ при $x\in A$, $E^x=\Lambda$ при $x\in R^{\nu_1}\setminus A$. Поэтому $\varphi(x)=\mu^2B$ при $x\in A$, $\varphi(x)=0$ при $x\in R^{\nu_1}\setminus A$. Стало быть, $\mu E=\int\limits_{R^{\nu_1}}\varphi d\mu^1=\int\limits_{A}\varphi d\mu^1=\mu^2B\cdot\mu^1A$.

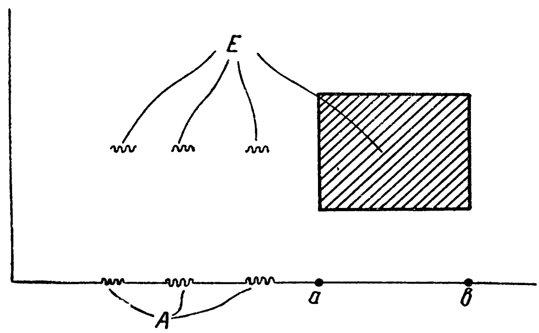

Рис. 13.

Пусть $E\in\mathfrak{R}$. Обозначим через φ меру сечений множества E. Если $x\,\overline{\in}\,\mathrm{Pr}_\mathrm{I}E$ $(x\in R^{\nu_1})$, то по самому определению проекции $E^x=\Lambda$, и, следовательно, $\varphi(x)=0$. Поэтому, казалось бы, интеграл в (2) можно заменить интегралом $\int\limits_{\mathrm{Pr}_\mathrm{I}E}\varphi d\mu^1$. Мы должны, однако, предостеречь читателя от такой замены. Дело в том, что множество $\mathrm{Pr}_\mathrm{I}E$ может оказаться неизмеримым (относительно μ^1), так что указанный интеграл может просто не иметь смысла.

Для того чтобы представить себе, как может осуществиться эта возможность, обратимся к рис. 13. Предположим, что множество $A\subset R^1$, изображенное на этом рисунке, не принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{M}^1$. Первая проекция изображенного на рисунке множества E, очевидно, содержащегося в $\mathfrak{R}_2=\mathfrak{M}^2$, равна $A \cup [a, b]$ и, конечно, не принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}^1$, хотя $E \in \mathfrak{M}^2$.

В связи со сказанным представляет интерес следующее понятие.

Определение 1. *Почти-проекцией множества* E $(E \in \mathfrak{R})$ будем называть множество $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E$ всех таких элементов $x \in R^{\nu_1}$, что

$$E^x \in \mathfrak{R}_2 \text{ и } \mu^2 E^x > 0. \tag{8}$$

Замечание 3. Используя определение меры сечений φ, можно записать условие (8) в равносильной форме: $\varphi(x) > 0$, т. е. $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E = \{x \in R^{\nu_1} : \varphi(x) > 0\}$. Так как φ — измеримая относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$ функция, то отсюда немедленно вытекает (см. замечание 1 из п. 3.1), что $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E \in \mathfrak{R}_1$. Поскольку $\varphi(x) = 0$ для $x \in R^{\nu_1} \setminus \widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E$, то из (2) находим

$$\mu E = \int\limits_{\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E} \varphi \, d\mu^1. \tag{9}$$

Понятно, что если множество $A \in \mathfrak{R}_1$ содержит почти-проекцию $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E$, то

$$\mu E = \int\limits_{A} \varphi \, d\mu^1. \tag{10}$$

Так как, очевидно, $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} E \supset \widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E$, то, когда проекция $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} E \in \mathfrak{R}_1$, в (10) можно принять $A = \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} E$.

Аналогично определяется *почти-проекция* $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{II}} E$. В замечании 1 она играет ту же роль, что и множество $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E$ в ситуации, рассмотренной в теореме.

5.2. Укажем некоторые применения теоремы 1.

Рассмотрим числа ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и $r > 0$ и обозначим через $\mathbf{D}^\nu(r)$ шар пространства R^ν с центром в начале координат радиуса r: $\mathbf{D}^\nu(r) = \{x \in R^\nu : \|x\|_\nu < r\}$, где

$$\|x\|_\nu = \left[\sum_{k=1}^{\nu} |x_k|^2\right]^{1/2} \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in R^\nu). \tag{11}$$

Понимая под μ_ν, как обычно, меру Лебега размерности ν, поставим задачу вычислить $\mu_\nu \overline{\mathbf{D}^\nu}(r)$.

Прежде всего заметим, что множество $\overline{\mathbf{D}^\nu}(r)$, будучи замкнутым в пространстве R^ν, измеримо относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}^\nu$ (см. гл. I, п. 3.8), так что $\mu_\nu \overline{\mathbf{D}^\nu}(r)$ имеет смысл.

Введем отображение T: $x \to rx$ $(x \in R^\nu)$ множества R^ν в себя. Это отображение — гомотетия пространства R^ν. Согласно сказанному в гл. I, п. 4.3, каково бы ни было измеримое (относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}^\nu$) множество E, его образ $T[E]$ также измерим и $\mu_\nu T[E] = r^\nu \mu_\nu E$. В частности, принимая здесь $E = \overline{\mathbf{D}^\nu}(1)$, получим $T[E] = \overline{\mathbf{D}^\nu(r)}$, так что

$$\mu_\nu \overline{\mathbf{D}^\nu(r)} = r^\nu \mu_\nu \overline{\mathbf{D}^\nu(1)} = \alpha_\nu r^\nu, \tag{12}$$

где $\alpha_\nu = \mu_\nu \overline{\mathbf{D}^\nu(1)}$.

Если $\nu = 1$, то $\overline{\mathbf{D}^1(1)} = [-1, 1]$ и $\alpha_1 = \mu_1 [-1, 1] = 2$.

Предположим, что $\nu > 1$. Применим теорему 1, взяв в ней $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu - 1$, $E = \overline{D^\nu(1)}$. Пусть $x \in R^{\nu_1}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}) \in R^{\nu_2}$. Соотношение $y \in E^x$ означает, что $z = (x, y) = (x, y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}) \in E$, т. е. что $\|z\|_\nu = [x^2 + y_1^2 + \ldots + y_{\nu-1}^2]^{1/2} \leqslant 1$, или, иначе говоря, $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{\nu-1}^2 \leqslant 1 - x^2$. Отсюда вытекает, что если $|x| > 1$, то $E^x = \Lambda$, если же $|x| \leqslant 1$, то

$$E^x = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}) \in R^{\nu-1} : y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{\nu-1}^2 \leqslant 1 - x^2\},$$

и, поскольку $[y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{\nu-1}^2]^{1/2} = \|y\|_{\nu-1}$, последнее соотношение, переписанное в виде $E^x = \{y \in R^{\nu-1} : \|y\|_{\nu-1} \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$, показывает, что $E^x = \overline{\mathbf{D}^{\nu-1}(\sqrt{1-x^2})}$.

Таким образом, сохраняя обозначения п. 5.1, мы можем записать $E^x \in \mathfrak{R}^2$ $(x \in R^1)$, причем на основании (12) функция φ — мера сечений множества E — будет определяться равенством

$$\varphi(x) = \mu^2 E^x = \begin{cases} \alpha_{\nu-1} (1 - x^2)^{\frac{\nu-1}{2}} & (|x| \leqslant 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \quad (x \in R^1).$$

Как легко видеть, $\Pr_1 E = [-1, 1]$, поэтому в (10) можно взять $A = [-1, 1]$. Это даст

$$\alpha_\nu = \mu_\nu E = \int_{[-1, 1]} \varphi d\mu^1 = \alpha_{\nu-1} \int_{[-1, 1]} (1 - x^2)^{\frac{\nu-1}{2}} d\mu_1. \tag{13}$$

В гл. II, п. 2.4 отмечалось, что интеграл по мере Лебега размерности единица совпадает с обычным определенным интегралом, так что

$$\int_{[-1, 1]} (1 - x^2)^{\frac{\nu-1}{2}} d\mu_1 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{\nu-1}{2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\nu x dx.$$

Для вычисления последнего интеграла (обозначим его символом I_ν) применим формулу интегрирования по частям (считая пока, что $\nu \geqslant 2$):

$$I_\nu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\nu x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1} x \cos x dx =$$

$$= \cos^{\nu-1} x \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (\nu - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{\nu-2} x dx =$$

$$= (\nu - 1)\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{\nu-2} x dx\right] = (\nu - 1)\,[I_{\nu-2} - I_\nu].$$

Поэтому $I_\nu = \frac{\nu - 1}{\nu} I_{\nu-2}$ ($\nu \geqslant 2$, $\nu \in \mathbb{N}$). Кроме того, легко видеть, что $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$.

Рассмотрим последовательность $\{\Gamma_{\nu-1}\}_{\nu=1}^\infty$, такую, что

$$\Gamma_0 = \sqrt{\pi},\ \Gamma_1 = 1,\ \Gamma_n = \frac{n-1}{2}\Gamma_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$I_\nu = \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_{\nu+1}} \sqrt{\pi}. \tag{15}$$

Подставляя в равенство (13) значение интеграла (15), получим

$$\alpha_\nu = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_{\nu+1}} \alpha_{\nu-1}.$$

Но точно так же

$$\alpha_k = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k+1}} \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, \nu - 1).$$

Поэтому

$$\alpha_\nu = [\sqrt{\pi}]^{\nu-1} \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_{\nu+1}} \cdot \frac{\Gamma_{\nu-1}}{\Gamma_\nu} \cdots \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} \alpha_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_{\nu+1}} \pi^{\frac{\nu-1}{2}} \alpha_1 = \frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma_{\nu+1}}. \tag{16}$$

Пользуясь (14), укажем значения α_ν для $\nu = 1, 2, \ldots, 10$.

ν:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_ν:	2	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$\frac{1}{6}\pi^3$	$\frac{16}{105}\pi^3$	$\frac{1}{24}\pi^4$	$\frac{32}{945}\pi^4$	$\frac{1}{120}\pi^5$

5.3. Пусть ν — натуральное число, $\nu \geqslant 2$. Рассмотрим замкнутый промежуток Δ числовой прямой R^1* и положитель-

* Промежуток Δ может быть и бесконечным. В этом случае $\Delta = [a, +\infty)$, или $\Delta = (-\infty, b]$, или, наконец, $\Delta = (-\infty, +\infty) = R^1$. Для нас важно, чтобы множество Δ было замкнуто в пространстве R^1.

ную непрерывную функцию f, заданную на Δ. Предположим, что $x \in R^1$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}) \in R^{\nu-1}$, $z = (x, y) = (x, y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}) \in R^\nu$.

Определение 1. Множество

$$V = V(f, \Delta) = \left\{(x, y) \in R^\nu : x \in \Delta,\ \|y\|_{\nu-1} = (y_1^2 + \ldots + y_{\nu-1}^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant f(x)\right\}$$

называется *телом вращения* (размерности ν).

Естественность этой терминологии читатель уяснит себе, взглянув на рис. 14, соответствующий случаю $\nu = 3$. На этом рисунке изображен график, лежащий в плоскости xy_1, который вращается вокруг оси x.

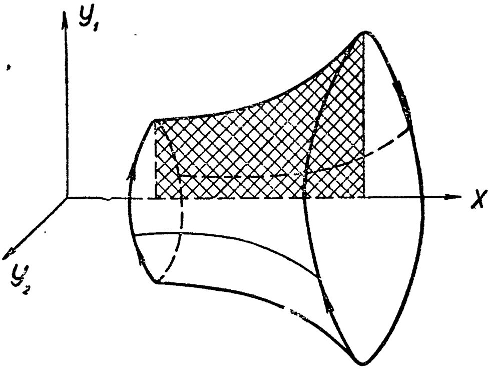

Рис. 14.

Предложение 1. V — замкнутое множество пространства R^ν.

Доказательство. Достаточно установить, что если $z = (x, y) \overline{\in} V$ ($x \in R^1$, $y \in R^{\nu-1}$), то существует такая окрестность S_z точки z, которая не пересекается с V. Но $z \overline{\in} V$ означает, что имеет место одно из двух: либо $x \overline{\in} \Delta$, либо $x \in \Delta$, но $\|y\|_{\nu-1} > f(x)$.

Разберем сначала первый случай. Поскольку $x \overline{\in} \Delta$, а промежуток Δ замкнутый, то найдется такое число $\delta > 0$, что промежутки Δ и $(x - \delta, x + \delta)$ не будут иметь общих точек. В качестве S_z тогда можно принять открытый шар $\mathbf{D}^\nu(z, \delta)$ (пространства R^ν) с центром в точке z радиуса δ. Действительно, если $u \in D^\nu(z, \delta)$, то $\|u - z\|_\nu < \delta$, т. е. если $u = (\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{\nu-1})$, то $\left[(\bar{x} - x)^2 + \sum_{k=1}^{\nu-1} (\bar{y}_k - y_k)^2\right]^{1/2} < \delta$. Отсюда видно, что $|\bar{x} - x| \leqslant \|u - z\|_\nu < \delta$, а это означает, что $\bar{x} \in (x - \delta, x + \delta)$ и, следовательно, $\bar{x} \overline{\in} \Delta$. Стало быть, точка $u = (\bar{x}, \bar{y})$ $(\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{\nu-1}))$ не может принадлежать множеству V.

Пусть теперь $x \in \Delta$, но $\|y\|_{\nu-1} > f(x)$. Ясно, что найдется столь малое число $\varepsilon > 0$, что $\|y\|_{\nu-1} - \varepsilon > f(x)$, а ввиду непрерывности функции f можно указать такое число $\delta > 0$, что $f(\bar{x}) < \|y\|_{\nu-1} - \varepsilon$ для всех $\bar{x} \in (x - \delta, x + \delta) \cap \Delta$. Понятно, что можно считать $\delta \leqslant \varepsilon$. Будем и в этом случае понимать под S_z шар $\mathbf{D}^\nu(z, \delta)$ пространства R^ν с центром z и радиусом δ. Пусть $u=(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{D}^\nu(z, \delta)$ $(\bar{x} \in R^1, \bar{y}=(\bar{y}_1, y_2, \ldots, \bar{y}_{\nu-1}) \in R^{\nu-1})$. Как и выше, это означает, что $\|u-z\|_\nu = [(\bar{x}-x)^2 + \|\bar{y}-y\|^2_{\nu-1}]^{1/2} < \delta$. Следовательно, $|\bar{x}-x| \leqslant \delta$. Если при этом $\bar{x} \bar{\in} \Delta$, то, очевидно, $u \bar{\in} V$, если же $\bar{x} \in \Delta$, то $\bar{x} \in (x-\delta, x+\delta) \cap \Delta$, и тем самым $f(\bar{x}) < \|y\|_{\nu-1} - \varepsilon$. Но

$$\|y\|_{\nu-1} = \|\bar{y} + (y-\bar{y})\|_{\nu-1} \leqslant \|\bar{y}\|_{\nu-1} + \|y-\bar{y}\|_{\nu-1} \leqslant \|\bar{y}\|_{\nu-1} + \|u-z\|_\nu < \\ < \|\bar{y}\|_{\nu-1} + \delta.$$

Следовательно, $\|\bar{y}\|_{\nu-1} > \|y\|_{\nu-1} - \delta > f(\bar{x}) - \delta + \varepsilon \geqslant f(\bar{x})$, так что и в этом случае $u \bar{\in} V$. Замкнутость множества V доказана.

Пусть μ_ν означает меру Лебега размерности ν. Множество V, будучи замкнутым, измеримо относительно меры μ_ν. Для вычисления $\mu_\nu V$ воспользуемся опять теоремой 1, приняв в ней $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu - 1$, $E = V$.

Почти дословно повторяя сказанное в п. 5.2, найдем, что

$$E^x = \begin{cases} \overline{\mathbf{D}^{\nu-1}(f(x))} & (x \in \Delta), \\ \Lambda & (x \bar{\in} \Delta) \end{cases} \quad (x \in R^1),$$

где, как и в п. 5.2, $\overline{\mathbf{D}^{\nu-1}(f(x))}$ означает замкнутый шар пространства $R^{\nu-1}$ с центром в начале координат и радиусом $f(x)$.

Если учесть равенство (12), получаем для функции φ — меры сечений множества E — следующие значения:

$$\varphi(x) = \mu^2 E^x = \begin{cases} \alpha_{\nu-1}[f(x)]^{\nu-1} & (x \in \Delta), \\ 0 & (x \bar{\in} \Delta) \end{cases} \quad (x \in R^1),$$

так что, согласно замечанию 3 к теореме 1,

$$\mu V = \mu E = \int_{R_1} \varphi d\mu^1 = \alpha_{\nu-1} \int_\Delta [f]^{\nu-1} d\mu_1.$$

В частности, если $\nu = 3$ (см. рис. 14),

$$\mu V = \pi \int_\Delta f^2 d\mu_1.$$

5.4. Пусть опять ν — натуральное число, $\nu \geqslant 2$. Примем на этот раз $\nu_1 = \nu - 1$, $\nu_2 = 1$. Рассмотрим множество A $(A \subset R^{\nu-1})$ и функцию f, заданную по крайней мере на множестве A и принимающую на нем лишь конечные неотрицательные значения.

Определение 1. Множество (см. рис. 15)

$$\Gamma(f; A) = \{z \in R^\nu : z = (x, y),\ x \in A,\ y \in R^1,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \quad (17)$$

называется *подграфиком функции* f (над множеством A).

П р е д л о ж е н и е 1. Предположим, что соблюдены условия:

1) $A \in \mathfrak{R}_1$;

2) функция f измерима на множестве A относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$;

3) $\Gamma(f;\ A) \in \mathfrak{R}$.

Тогда

$$\mu_\nu \Gamma(f;\ A) = \int_A f d\mu_{\nu-1}\ . \tag{18}$$

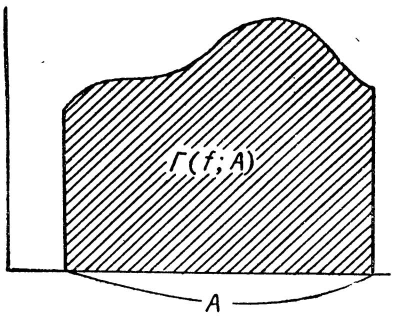

Рис. 15.

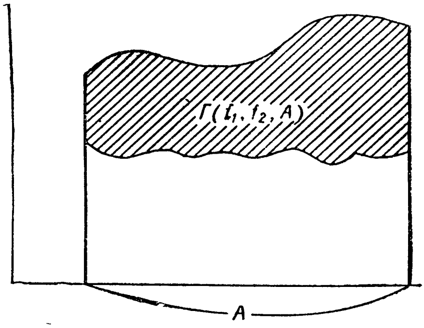

Рис. 16.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Примем в теореме 1 (5.II) $E = \Gamma(f;\ A)$. Выясним смысл функции φ — меры сечений множества E. Пусть $x \in R^{\nu-1}$. Если $x \in A$, то соотношение $(x,\ y) \in E$ ввиду (17) равносильно тому, что $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, т. е. тому, что $y \in [0,\ f(x)]$, в случае же, когда $x \bar{\in} A$, очевидно, $(x,\ y) \bar{\in} E$ ни при каком $y \in R^1$. Таким образом,

$$E^x = \begin{cases} [0,\ f(x)] & (x \in A), \\ \Lambda & (x \bar{\in} A) \end{cases} \quad (x \in R^{\nu-1}).$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \mu^2 E^x = \begin{cases} f(x) & (x \in A), \\ 0 & (x \bar{\in} A) \end{cases} \quad (x \in R^{\nu-1}).$$

Поскольку $\mathrm{Pr}_1 E = A \in \mathfrak{R}_1$, то можно воспользоваться замечанием 3 к теореме 1, что и приводит к равенству (18).

Буквально так же обосновывается и несколько более общий результат.

П р е д л о ж е н и е 2. Сохраним за ν, ν_1, ν_2 и A прежние значения, но вместо одной функции f рассмотрим две функции f_1 и f_2, предположив, что каждая из них задана по крайней мере на A, конечна на A и

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \quad (x \in A).$$

Образуем множество (см. рис. 16)

$$\Gamma(f_1,\ f_2;\ A) = \{z \in R^\nu : z = (x,\ y),\ x \in A,\ y \in R^1, f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$

Ясно, что если $f_1(x)=0$ $(x \in A)$, то $\Gamma(f_1, f_2; A)=\Gamma(f_2; A)$. Если

1) $A \in \mathfrak{R}_1$,

2) функции f_1 и f_2 измеримы на множестве A относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$,

3) $\Gamma(f_1, f_2; A) \in \mathfrak{R}$,

тогда

$$\mu_\nu \Gamma(f_1, f_2; A)=\int_A (f_2-f_1)\, d\mu_{\nu-1}. \tag{19}$$

Использование формул (18) или (19) затруднено необходимостью проверки условия 3). Как будет показано в п. 5.5, на самом деле условие 3) излишне — оно является следствием первых двух. Однако доказательство упомянутого факта достаточно сложно. Между тем с помощью сравнительно простых рассуждений можно доказать соблюдение условия 3) (а заодно и первых двух) для случая, который чаще других встречается в приложениях.

Предложение 3. Предположим, что множество A замкнуто в пространстве $R^{\nu-1}$, а функции f_1 и f_2 непрерывны на A. При этих условиях множество $\Gamma(f_1, f_2; A)$ оказывается замкнутым в пространстве R^ν.

Доказательство. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек множества $E=\Gamma(f_1, f_2; A)$, сходящаяся к точке $z_0 \in R^\nu$. Если

$$z_n=(x_n, y_n) \quad (x_n \in R^{\nu-1},\ y_n \in R^\nu;\ n=0, 1, \ldots),$$

то $x_n \to x_0$ в пространстве $R^{\nu-1}$ и $y_n \to y_0$ в пространстве R^1 (последнее означает, что числовая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел y_0). Но $z_n \in E$ $(n=1, 2, \ldots)$ влечет соотношения

$$x_n \in A; \quad f_1(x_n) \leqslant y_n \leqslant f_2(x_n) \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{20}$$

поэтому вследствие замкнутости множества A будет $x_0 \in A$, и переход к пределу в неравенстве (20) даст

$$f_1(x_0)=\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) \leqslant y_0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f_2(x_n)=f_2(x_0),$$

т. е. $z_0=(x_0, y_0) \in E$, откуда и вытекает замкнутость множества E.

Предложение доказано.

Замечание 1. Поскольку замкнутые множества измеримы по Лебегу (гл. I, п. 3.8) и, равным образом, измеримы по Лебегу непрерывные функции, то в рассмотренной ситуации налицо все условия 1)—3), так что можно пользоваться формулой (19) и, в частности, (18).

Замечание 2. Если взять $f_1=f_2=f$, то придем к следующему интересному факту: лебегова мера (размерности ν) графика функции f, заданной на замкнутом множестве A пространства $R^{\nu-1}$ ($\nu=2, 3, \ldots$) и непрерывной на этом множестве, равна нулю.

Замечание 3. Было бы ошибочно думать, что указанный только что результат распространяется на множество точек непрерывной кривой (д. 3, п. 3). В действительности при любом ν ($\nu=2, 3, \ldots$) существует непрерывное отображение Φ_ν промежутка $\Delta=[0, 1]$ *на* прямоугольник $[0,1]\times[0,1]\times\ldots\times\times[0,1]$ пространства R^ν.

5.5. Под ν_1, ν_2 и ν будем подразумевать произвольные натуральные числа, связанные соотношением $\nu_1+\nu_2=\nu$.

Лемма. *Пусть множество* $A\in\mathfrak{R}_1$, *а множество* $B\in\mathfrak{R}_2$. *Тогда* $E=A\times B\in\mathfrak{R}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если измеримость произведения $A\times B$ доказана, то, по замечанию 2 к теореме 1,

$$\mu(A\times B)=\mu^1 A\cdot\mu^2 B. \tag{21}$$

Предположим сначала, что A — открытое множество пространства R^{ν_1}, а B — открытое множество пространства R^{ν_2}. Докажем, что в этом случае E будет открытым в пространстве R^ν.

Действительно, открытое множество служит окрестностью каждой своей точки. Поэтому если $z=(x, y)\in E$ ($x\in A$, $y\in B$), то найдутся открытые прямоугольники P и Q размерности, соответственно, ν_1 и ν_2, такие, что $x\in P\subset A$, $y\in Q\subset B$. Произведение $P\times Q$ — также открытый прямоугольник (размерности $\nu_1+\nu_2=\nu$), причем $z\in P\times Q\subset A\times B=E$. Это означает, что z — внутренняя точка множества E, откуда, ввиду произвольности z, следует вывод, что E открыто. Измеримость множества E относительно меры μ вытекает теперь из сказанного в гл. I, п. 3.8.

Пусть множество A — типа G_δ, т. е. такое множество, которое можно представить в виде пересечения некоторого счетного семейства $\{G_\xi\}$ ($\xi\in\Xi$) открытых в пространстве R^{ν_1} множеств: $A=\bigcap_{\xi\in\Xi} G_\xi$. Относительно B по-прежнему будем предполагать, что оно открыто (в пространстве R^{ν_2}). Поскольку, очевидно, $E=A\times B=\bigcap_{\xi\in\Xi}(G_\xi\times B)$ и по доказанному ранее $G_\xi\times B\in\mathfrak{R}$ ($\xi\in\Xi$), выводим отсюда, что и при сделанных предположениях $E\in\mathfrak{R}$.

Точно так же можно установить, что $E\in\mathfrak{R}$ и тогда, когда A открыто в R^{ν_1}, а B — множество типа G_δ в пространстве R^{ν_2} или, наконец, когда оба множества — A и B — типа G_δ в соответствующих пространствах.

Пусть $A\in\mathfrak{R}_1$ и $B\in\mathfrak{R}_2$ — произвольные множества. Согласно следствию 2 теоремы 6 (3.I), можно подобрать такие множества

$C \subset R^{\nu_1}$ и $D \subset R^{\nu_2}$ типа G_δ в пространствах R^{ν_1} и R^{ν_2} соответственно, что

$$C \supset A, \; D \supset B, \; \mu^1(C \setminus A) = \mu^2(D \setminus B) = 0. \tag{22}$$

Предположим дополнительно, что $\mu^1 A = 0$. Тогда в силу (22) будет также $\mu^1 C = 0$. Следовательно, учитывая, что уже доказано включение $C \times D \in \mathfrak{R}$, в соответствии с (21) можем написать $\mu(C \times D) = \mu^1 C \cdot \mu^2 D = 0$. Поскольку $E = A \times B \subset C \times D$ и мера μ — полная, получаем отсюда $E \in \mathfrak{R}$. Подобным же образом результат леммы оправдывается для случая, когда $A \in \mathfrak{R}_1$ — произвольно, а $\mu^2 B = 0$.

Не будем теперь накладывать на A и B каких-либо дополнительных ограничений. Замечая, что в правой части равенства

$$E = A \times B = (C \times D) \setminus \{[A \times (D \setminus B)] \cup [(C \setminus A) \times B] \cup \cup [(C \setminus A) \times (D \setminus B)]\}$$

все четыре множества, по доказанному, входят в состав системы $\mathfrak{R}$, заключаем, что и $E \in \mathfrak{R}$.

Лемма полностью доказана.

Будем считать в дальнейшем $\nu_1 = \nu - 1$, $\nu_2 = 1$. Пусть, как и в п. 5.4, даны множество $A \subset R^{\nu-1}$ и конечные функции f_1, f_2, заданные по крайней мере на множестве A, причем $c_1(x) \leqslant f_2(x)$ $(x \in A)$.

Теорема 2 (5.II). *Если $A \in \mathfrak{R}_1$ и функции f_1 и f_2 измеримы на A относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$, то* $\Gamma(f_1, f_2; A) \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда обе функции f_1 и f_2 ступенчатые на A (гл. II, п. 1.6). Обозначим через τ_i $(i = 1, 2)$ такое разбиение множества A, что на каждом множестве $e \in \tau_i$ функция f_i постоянна. Заменим τ_1 и τ_2 более мелким разбиением $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$. Учитывая, что

$$\Gamma(f_1, f_2; A) = \bigcup_{e \in \tau} \Gamma(f_1, f_2; e),$$

достаточно доказать, что $\Gamma(f_1, f_2; e) \in \mathfrak{R}$ при любом $e \in \tau$, причем можно ограничиться лишь непустыми множествами e. Обозначая через m_e и соответственно через M_e значение, которое принимает на множестве $e \in \tau$ функция f_1 или соответственно f_2, можем написать

$$\Gamma(f_1, f_2; e) = \{z \in R^\nu : z = (x, y), \; x \in e, \; y \in R^1, \; m_e \leqslant y \leqslant M_e\} = e \times [m_e, M_e],$$

после чего остается применить результат леммы.

Обратимся к общему случаю. Согласно теореме 1 (3.II) (см. также замечание к этой теореме) можно подобрать последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых на множестве A

функций, таких, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая и

$$f_1(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x),\ f_2(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\quad (x\in A). \tag{23}$$

Убедимся в справедливости равенства

$$\Gamma(f_1,\ f_2;\ A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma(\varphi_n,\ \psi_n;\ A). \tag{24}$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi_n(x)\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\psi_n(x)\quad (x\in A;\ n=1, 2, \ldots),$$

без труда найдем, что

$$\Gamma(f_1, f_2;\ A)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma(\varphi_n,\ \psi_n;\ A).$$

Возьмем элемент $z\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma(\varphi_n,\ \psi_n;\ A)$. Если $z=(x,\ y)$ $(x\in R^{\nu-1},\ y\in R^1)$, то $x\in A$ и $\varphi_n(x)\leqslant y\leqslant\psi_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, получаем $f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)$, так что $z\in\Gamma(f_1,\ f_2;\ A)$. Равенство (24) доказано, и с учетом предыдущего вместе с ним доказана теорема.

Следствие 1. *Подграфик любой измеримой (относительно $\mathfrak{R}_1$) на множестве $A\,(A\in\mathfrak{R}_1)$ функции принадлежит σ-кольцу $\mathfrak{R}$.*

Следствие 2. *График любой измеримой (относительно $\mathfrak{R}_1$) на множестве $A\,(A\in\mathfrak{R}_1)$ функции, заданной на множестве A, принадлежит σ-кольцу $\mathfrak{R}$.*

Легко видеть, что он представляет собой измеримое по Лебегу множество меры нуль (имеется в виду мера Лебега μ_ν размерности ν).

Замечание. Результат следствия 1 обратим. Именно можно показать, что если $A\in\mathfrak{R}_1$ и $\Gamma(f;\ A)\in\mathfrak{R}$, то функция f измерима относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$ на множестве A.

Иногда этот факт берут за основу для определения интеграла (по мере Лебега). В этом случае, для того чтобы ввести интеграл, достаточно лишь сведений из теории меры, так как под интегралом (от положительной функции) понимают просто меру подграфика, т. е. формула (18) служит определением.

5.6. На теорему 1 (5.II) опирается доказательство следующей ниже теоремы Фубини, которая содержит условия, позволяющие свести вычисление интеграла по множеству из $\mathfrak{R}$ к нахождению двух интегралов по некоторым множествам, содержащимся в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$.

Определение 1. Рассмотрим множество $E\ (E\subset R^\nu)$ и функцию f, определенную по крайней мере на множестве E.

Пусть $z=(x, y)$ $(x \in R^{\nu_1}, y \in R^{\nu_2})$ — произвольный элемент множества R^{ν} $(\nu=\nu_1+\nu_2)$. Зададим на сечении E^x функцию f^x, полагая

$$f^x(y)=f(x, y) \quad (y \in E^x). \tag{25}$$

Функция f^x называется *сечением функции f элементом $x \in R^{\nu_1}$*. Аналогично определяется *сечение ${}^yf$ функции f элементом $y \in R^{\nu_2}$*:

$${}^yf(x)=f(x, y) \quad (x \in {}^yE). \tag{26}$$

Свойства функции f^x зависят, разумеется, от элемента $x \in R^{\nu_1}$. В частности, для одних x эта функция измерима относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_2$, для других — нет. Таким образом, множество R разбивается на два непересекающихся подмножества — A_f и B_f. Первое состоит из всех таких $x \in R^{\nu_1}$, для которых сечение f^x измеримо, второе — из всех остальных элементов из R^{ν_1}.

Измеримость функции f^x не обеспечивает еще существование интеграла $\int\limits_{E^x} f^x d\mu^2$. Поэтому функция I определена равенством

$$I(x)=\int\limits_{E^x} f^x d\mu^2 \tag{27}$$

лишь на части множества A_f (если $E^x=\Lambda$, то $I(x)=0$). Если интеграл (27) для некоторого данного $x \in R^{\nu_1}$ не имеет смысла (т. е. если f^x не имеет интеграла по множеству E^x), то положим $I(x)=0$. Тем самым функция I оказывается заданной на всем множестве R^{ν_1}. Функцию I мы будем называть *интегралом сечений функции f*.

Предположим, что $E \in \mathfrak{R}$ и существует интеграл $\int\limits_E f d\mu$. Как будет показано, эти условия обеспечивают существование интеграла $\int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1$ и равенство $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1$. Это и есть теорема Фубини.

Прежде, чем давать точную формулировку, условимся о некоторых обозначениях, которые хотя и страдают известной некорректностью, но в данной обстановке оказываются удобнее обычных. Именно, учитывая (26), мы будем записывать интеграл (27) в виде

$$I(x)=\int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y). \tag{28}$$

Мы сохраним это обозначение даже и в том случае, когда интеграл в правой части (28) не существует в прямом смысле этого слова, полагая в соответствии с принятым выше соглашением $\int\limits_{E^x} f(x,\ y)\,d\mu^2(y)=0$.

Если функция I имеет интеграл, то, принимая во внимание (28), будем записывать

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1 = \int\limits_{R^{\nu_1}} I(x)\,d\mu^1(x) = \int\limits_{R^{\nu_1}} \left[\int\limits_{E^x} f(x,\ y)\,d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x). \qquad (29)$$

Эта запись делает понятным термин *повторный интеграл*, который мы будем использовать для обозначения интеграла (29).

Заметим, что в качестве области интегрирования во внешнем интеграле в (29) может быть взято любое множество A $(A \in \mathfrak{R}_1)$, содержащее почти-проекцию $\widetilde{\Pr}_I E$ множества E (см. замечание 3 к теореме 1). Действительно, согласно теореме 1 существует множество $e \in \mathfrak{R}_1$, такое, что

$$\mu^1 e = 0,\ E^x \in \mathfrak{R}_2 \quad \left(x \in R^{\nu_1} \diagdown e\right). \qquad (30)$$

Поэтому если элемент $x \in R^{\nu_1}$ не принадлежит ни множеству e, ни множеству A, то $E^x \in \mathfrak{R}_2$ и, поскольку $A \supset \widetilde{\Pr}_I E$, должно быть $\mu^2 E^x = 0$. Следовательно, в силу (28) $I(x)=0$ (теорема 1 (2.II)). Учитывая, что $\mu^1(e \diagdown A) \leqslant \mu^1 e = 0$, будем иметь

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1 = \int\limits_{A \cup e} I d\mu^1 = \int\limits_{A} I d\mu^1 + \int\limits_{e \diagdown A} I d\mu^1 = \int\limits_{A} I d\mu^1.$$

Укажем еще на одну терминологическую особенность дальнейшего изложения. Чтобы подчеркнуть различие между интегралом по мере μ, с одной стороны, и по мерам μ^1 и μ^2 — с другой, мы будем иногда называть первый *двойным интегралом* и писать вместо $\int\limits_E f d\mu$ так: $\iint\limits_E f(x,\ y)\,d\mu(x,\ y)$.

Дадим теперь формулировку теоремы Фубини.

Теорема 3 (5.II) (Фубини). *Пусть даны: множество* $E \in \mathfrak{R}$ *и функция* f, *определенная на множестве* E *и такая, что существует двойной интеграл* $\int\limits_E f d\mu = \iint\limits_E f(x,\ y)\,d\mu(x,\ y)$. *Тогда*

а) *можно указать такое множество* $e \in \mathfrak{R}_1$, *что* $\mu^1 e = 0$ *и для любого* $x \in R^{\nu_1} \diagdown e$ *существует интеграл*

$$\int\limits_{E^x} f^x d\mu^2 = \int\limits_{E^x} f(x,\ y)\,d\mu^2(y);$$

б) *существует повторный интеграл* (29), *равный двойному*:

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} \left[\int\limits_{E^x} f(x,\ y)\,d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x) = \iint\limits_E f(x,\ y)\,d\mu(x,\ y). \qquad (31)$$

Доказательство. Докажем теорему сначала для того простейшего случая, когда функция f — ступенчатая, принимающая два значения, одно из которых равно нулю, а другое — вещественное неотрицательное число c $(c \in \overline{R})$. Обозначим $E_0 = \{z \in E : f(z) = c\}$. Ясно, что $E_0 \in \mathfrak{R}$ (гл. II, п. 3.1). Применяя теорему 1 (5.II) к множествам E и E_0, найдем согласно п. а) этой теоремы такие множества e и e_0, что

$$e, e_0 \in \mathfrak{R}_1, \ \mu_1 e = \mu_1 e_0 = 0, \ E^x \in \mathfrak{R}_2 \ (x \in R^{\nu_1} \setminus e), \\ E_0^x \in \mathfrak{R}_2 \ \ (x \in R^{\nu_1} \setminus e_0). \tag{32}$$

Поскольку для любого $x \in R^{\nu_1}$

$$f^{(x)}(y) = f(x, y) = \begin{cases} c & (y \in E_0^x), \\ 0 & (y \overline{\in} E_0^x) \end{cases} \ (y \in E^x),$$

то из (32) следует, что если $x \overline{\in} e \cup e_0$, то функция f^x измерима относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_2$. Будучи неотрицательной, эта функция имеет интеграл. При этом

$$I(x) = \int_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y) = c\mu^2 E_0^x \ \ (x \in R^{\nu_1} \setminus (e_0 \cup e)).$$

Учитывая, что $\mu^1(e \cup e_0) = 0$, выводим отсюда, что интеграл сечений I для функции f эквивалентен (относительно меры μ^1) функции, которая лишь множителем c отличается от функции φ_0 — меры сечений множества E_0. Поскольку эта последняя функция измерима относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_1$, то будет измеримой и функция I. Далее, воспользовавшись результатами предложений 2 и 3 из гл. II, п. 3.10, получим на основании п. б) теоремы 1 (5.II)

$$\int_{R^{\nu_1}} I\, d\mu^1 = \int_{R^{\nu_1}} (c\varphi_0)\, d\mu^1 = c \int_{R^{\nu_1}} \varphi_0 d\mu^1 = c\mu E_0.$$

Но и $\int_E f d\mu = c\mu E_0$, так что равенство (31) доказано.

Предположим теперь, что f — произвольная ступенчатая неотрицательная функция. Существует разбиение τ множества E, на множествах которого функция f постоянна. Для каждого множества $D \in \tau$ определим на E функцию f_D, полагая

$$f_D(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in D), \\ 0 & (z \overline{\in} D) \end{cases} \ (z \in E). \tag{33}$$

Ясно, что f_D — ступенчатая функция рассмотренного в начале доказательства типа. Понятно также, что

$$f(z) = \sum_{D \in \tau} f_D(z) \ \ (z \in E). \tag{34}$$

Действительно, если $z \in E$, то существует единственное множество $D_0 \in \tau$, такое, что $z \in D_0$, а тогда согласно (33) $f_{D_0}(z) = f(z)$ и $f_D(z) = 0$ при $D \neq D_0$, $D \in \tau$.

Обозначим через I и соответственно через I_D $(D \in \tau)$ интегралы сечений функций f и f_D. Поскольку для функций f_D $(D \in \tau)$ утверждение теоремы доказано, можем подобрать такие множества e_D, что $e_D \in \mathfrak{N}_1$, $\mu^1 e_D = 0$ и интеграл $\int\limits_{E^x} f_D(x, y)\, d\mu^2(y)$ существует для каждого $x \in R^{\nu_1} \setminus e_D$ $(D \in \tau)$. Обозначая через e объединение $\bigcup\limits_{D \in \tau} e_D$, на основании следствия 2 к теореме Б. Леви (гл. II, п. 4.2) установим, что для $x \in R^{\nu_1} \setminus e$ существует интеграл $\int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y)$, причем

$$I(x) = \int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y) = \sum_{D \in \tau} \int\limits_{E^x} f_D(x, y)\, d\mu^2(y) = \sum_{D \in \tau} I_D(x)$$

$$\left(x \in R^{\nu_1} \setminus e\right).$$

Так как, очевидно, $\mu^1 e = 0$, то $I(x) = \sum\limits_{D \in \tau} I_D(x)$ для почти всех $x \in R^{\nu_1}$. Еще раз применяя следствие 2 к теореме Б. Леви (возможность применения обусловлена замечанием 4 к цитированной теореме), получим, что существует повторный интеграл $\int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1$, равный сумме $\sum\limits_{D \in \tau} \int\limits_{R^{\nu_1}} I_D d\mu^1$. Записывая для функции f_D соотношение (31), найдем

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} I_D d\mu^1 = \int\limits_{R^{\nu_1}} \left[f_D(x, y)\, d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x) = \iint\limits_{E} f_D(x, y)\, d\mu(x, y) \quad (D \in \tau).$$

Но в силу (34) опять же на основании следствия 2 к теореме Б. Леви

$$\iint\limits_{E} f(x, y)\, d\mu(x, y) = \sum_{D \in \tau} \iint\limits_{E} f_D(x, y)\, d\mu(x, y) =$$
$$= \sum_{D \in \tau} \int\limits_{R^{\nu_1}} I_D d\mu^1 = \int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1,$$

что и доказывает теорему, когда f — функция рассмотренного вида.

Если, далее, f — произвольная неотрицательная измеримая функция, то в соответствии с замечанием к теореме 1 (3.II) можно указать такую возрастающую последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых неотрицательных функций, заданных на множестве E, что $f(z) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)$ $(z \in E)$. Схема дальнейших рассуждений отличается от только что разобранного случая лишь тем, что вместо следствия 2 к теореме Б. Леви здесь надо воспользоваться самой теоремой Б. Леви. Таким образом, можно считать исчерпанным и данный случай.

Предположим теперь, что f — произвольная измеримая относительно τ-кольца $\mathfrak{R}$ вещественная функция, имеющая интеграл $\int\limits_E f d\mu$. Последнее означает, что по крайней мере одна из функций f^+ или f^- суммируема. Допустим для определенности, что суммируема функция f^-. Так как функции f^+ и f^- неотрицательны и измеримы, то для них утверждения теоремы уже верны, так что если обозначить через I^+ и соответственно через I^- интегралы сечений функций f^+ и f^-, то в силу (31)

$$\int\limits_E f^+ d\mu = \int\limits_{R^{\nu_1}} I^+ d\mu^1, \quad \int\limits_E f^- d\mu = \int\limits_{R^{\nu_1}} I^- d\mu^1. \tag{35}$$

При этом можно указать множества e_1, $e_2 \in \mathfrak{R}_1$, такие, что $\mu^1 e_1 = \mu^1 e_2 = 0$ и существуют интегралы

$$\begin{aligned} I^+(x) &= \int\limits_{E^x} f^+(x, y)\, d\mu^2(y) \quad (x \in R^{\nu_1} \setminus e_1), \\ I^-(x) &= \int\limits_{E^x} f^-(x, y)\, d\mu^2(y) \quad (x \in R^{\nu_1} \setminus e_2). \end{aligned} \tag{36}$$

Поскольку функция f^- суммируема, второе из равенств (35) показывает, что будет суммируемой (по мере μ^1) и функция I^-. Следовательно, функция I^- почти везде (относительно меры μ^1) конечна на R^ν. Это означает, что найдется такое множество $e_3 \in \mathfrak{R}_1$, что

$$\mu^1 e_3 = 0, \quad I^-(x) < +\infty \quad (x \in R^{\nu_1} \setminus e_3).$$

Обозначим $e = e_1 \cup e_2 \cup e_3$. Если $x \in R^{\nu_1} \setminus e$, то, основываясь на предложении 3 из гл. II, п. 3.10, получаем в силу (36), что существует интеграл

$$\int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y) = \int\limits_{E^x} f^+(x, y)\, d\mu^2(y) - \int\limits_{E^x} f^-(x, y)\, d\mu^2(y) = I^+(x) - I^-(x).$$

Таким образом, если обозначить через I интеграл сечений функции f, то для указанных x, т. е. почти везде на R^{ν_1}, будет $I(x) = I^+(x) - I^-(x)$. Так как вследствие (35) (см. также гл. II, п. 3.10) разность

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} I^+ d\mu^1 - \int\limits_{R^{\nu_1}} I^- d\mu^1 = \int\limits_E f^+ d\mu - \int\limits_E f^- d\mu = \int\limits_E f d\mu$$

имеет смысл, то опять на основании предложения 3 из гл. II, п. 3.10 получаем, что существует интеграл

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} I d\mu^1 = \int\limits_{R^{\nu_1}} I^+ d\mu^1 - \int\limits_{R^{\nu_2}} I^- d\mu^1 = \int\limits_E f d\mu,$$

так что для функции f утверждение теоремы доказано.

Если, наконец, f — комплексная функция, то ввиду того, что по условию существует интеграл $\int\limits_E f d\mu$, функции $f_1 = \operatorname{Re} f$ и $f_2 = \operatorname{Im} f$ суммируемы на множестве E (гл. II, п. 2.6); с помощью рассуждений, вполне аналогичных тем, которые были проведены выше, нетрудно убедиться в справедливости теоремы и в данном случае.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Пусть, как и в условиях теоремы, $E \in \mathfrak{R}$ Предположим, что на множестве E задана функция f, измеримая относительно σ-кольца $\mathfrak{R}$. Если f — вещественная неотрицательная, то на основании пункта а) теоремы сечение f^x для почти всех $x \in R^{\nu_1}$ будет измеримой относительно σ-кольца $\mathfrak{R}_2$ функцией. Это утверждение сохраняет силу и без предположения о неотрицательности f. Для обоснования достаточно (в случае, когда f — вещественная) представить f в виде $f = f^+ - f^-$ и заметить, что $f^x = (f^+)^x - (f^-)^x$. Случай комплекснозначной функции f исчерпывается после этого сходным образом.

Замечание 2. Основываясь на замечании 1 к теореме 1, можно высказать следующий вариант теоремы Фубини.

Пусть $E \in \mathfrak{R}$ и функция f, определенная на множестве E, имеет интеграл; тогда

а) можно указать множество e ($e \in \mathfrak{R}_2$), такое, что $\mu^2 e = 0$, причем для каждого $y \in R^{\nu_2} \setminus e$ существует интеграл

$$J(y) = \int\limits_{{}^yE} f(x, y)\, d\mu^1(x);$$

б) существует повторный интеграл

$$\int\limits_{R^{\nu_2}} J(y)\, d\mu^2(y) = \int\limits_{R^{\nu_2}} \left[\int\limits_{{}^yE} f(x, y)\, d\mu^1(x)\right] d\mu^2(y), \qquad (37)$$

равный двойному интегралу $\int\limits_E f d\mu$.

Важным результатом, имеющим большое теоретическое и практическое значение, является предложение о возможности изменения порядка интегрирования.

Следствие 1. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$ и функция f имеет интеграл $\int\limits_E f d\mu$. Тогда существуют оба повторных интеграла* (29) *и* (37) *и они равны, т. е.*

$$\int\limits_{R^{\nu_1}} \left[\int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x) = \int\limits_{R^{\nu_2}} \left[\int\limits_{{}^yE} f(x, y)\, d\mu^1(x)\right] d\mu^2(y). \qquad (38)$$

Доказательство. Согласно теореме (в основной формулировке и в форме замечания 2), каждый из повторных интегралов совпадает с двойным.

Замечание 3. Напомним еще раз, что „внутренние“ интегралы в равенстве (38) — $\int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y)$ и $\int\limits_{{}^yE} f(x, y)\, d\mu^1(x)$ — представляют собой функции, определенные (в условиях следствия) на почти всем множестве R^{ν_1} и соответственно на почти всем R^{ν_2}. Далее, как уже отмечалось, область интегрирования во „внешних“ интегралах может быть сужена. Именно, вместо (38) можно написать равенство

$$\int\limits_A \left[\int\limits_{E^x} f(x, y)\, d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x) = \int\limits_B \left[\int\limits_{{}^yE} f(x, y)\, d\mu^1(x)\right] d\mu^2(y), \quad (39)$$

где A — произвольное множество из σ-кольца $\mathfrak{R}_1$, содержащее почти-проекцию $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{II}} E$, а B — произвольное множество, принадлежащее σ-кольцу $\mathfrak{R}_2$ и содержащее почти-проекцию $\widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{II}} E$.

Замечание 4. Формула (39) существенно упрощается, если множество E представляет собой произведение $A \times B$ множеств $A \in \mathfrak{R}_1$ и $B \in \mathfrak{R}_2$. В этом случае

$$E^x = \begin{cases} B & (x \in A), \\ \Lambda & (x \,\overline{\in}\, A) \end{cases} \ (x \in R^{\nu_1}), \quad {}^yE = \begin{cases} A & (y \in B), \\ \Lambda & (y \,\overline{\in}\, B) \end{cases} \ (y \in R^{\nu_2}),$$

поэтому $A \supset \widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{I}} E$, $B \supset \widetilde{\mathrm{Pr}}_{\mathrm{II}} E$. Следовательно, справедливо равенство

$$\int\limits_A \left[\int\limits_B f(x, y)\, d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x) = \int\limits_B \left[\int\limits_A f(x, y)\, d\mu^1(x)\right] d\mu^2(y).$$

Отметим особенно важный частный случай следствия 1 (называемый иногда теоремой Тонелли).

Следствие 2. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$ и функция f измерима на множестве E и неотрицательна. Тогда существуют оба повторных интеграла* (29) *и* (37) *и они равны, т. е. справедливо равенство* (38).

Важность этого утверждения состоит в том, что оно полностью освобождает нас от забот, связанных с доказательством существования повторных интегралов, фигурирующих в равенстве (38). Это дает возможность браться за вычисление такого интеграла, не зная заранее, конечен ли он. Такая возможность бывает очень полезной (см. примеры в § 6).

Остановимся еще на одном весьма частном, но важном случае теоремы.

Замечание 5. Предположим, что $E \subset R^{\nu+1}$, $E = \Gamma(F_1, F_2; A)$, где A — измеримое по Лебегу множество пространства R^ν, а функции F_1, F_2 заданы и непрерывны на множестве A. Предположим еще, что функция f, заданная на множестве E, непрерывна и существует интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\, d\mu(x, y)$. Тогда

1) интеграл $\int\limits_{[F_1(x),\, F_2(x)]} f(x,\ y)\, d\mu^2(y)$ существует и конечен при любом $x \in A$;

2) $$\iint\limits_E f(x,\ y)\, d\mu(x,\ y) = \int\limits_A \left[\ \int\limits_{[F_1(x),\, F_2(x)]} f(x,\ y)\, d\mu^2(y)\right] d\mu^1(x). \tag{40}$$

Доказательство. Легко понять, что $\Pr_{\mathrm{I}} E = A$ и что при любом $x \in A$ множество E^x представляет собою промежуток $[F_1(x),\ F_2(x)]$. Функция f^x, очевидно, непрерывна на этом промежутке при любом $x \in A$ и потому суммируема на нем (см. п. 3.9). Следовательно, интеграл $\int\limits_{E^x} f(x,\ y)\, d\mu^2(y)$ существует и конечен при всяком $x \in A$. Ввиду того, что $A = \Pr_{\mathrm{I}} E \supset \widetilde{\Pr}_{\mathrm{I}} E$, мы на основании замечания 3 заключаем, что выполняется равенство (40).

Доказательство закончено.

Внутренний интеграл $\int\limits_{[F_1(x),\, F_2(x)]} f(x,\ y)\, d\mu^2(y)$ в правой части равенства (40) иногда удается вычислить, применяя формулу Лейбница—Ньютона (см. теорему 4 (2.II)). Поэтому при вычислении кратного интеграла $\iint\limits_E f(x,\ y)\, d\mu(x,\ y)$ обычно стараются представить множество E в виде объединения попарно не пересекающихся множеств вида $\Gamma(F_1,\ F_2;\ A)$.

Следующее замечание часто используется при вычислении кратных интегралов.

Замечание 6. На протяжении этого параграфа мы отождествляли множество $R^{\nu_1+\nu_2}$ с произведением $R^{\nu_1} \times R^{\nu_2}$. Это выражалось в том, что точку $z \in R^{\nu_1+\nu_2}$ мы не отличали от упорядоченной пары $(x,\ y)$, где $x \in R^{\nu_1}$, $y \in R^{\nu_2}$. Точнее говоря, имелось в виду, что пара $((x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\nu_1}),\ (y_1,\ \ldots,\ y_{\nu_2}))$ — это и есть точка $(x_1,\ \ldots,\ x_{\nu_1},\ y_1,\ \ldots,\ y_{\nu_2}) \in R^{\nu_1+\nu_2}$. То же самое можно разъяснить на геометрическом языке так: первая проекция $\Pr_{\mathrm{I}} E$ множества E $(E \subset R^{\nu_1+\nu_2})$ — это проекция на координатную плоскость, натянутую на первые ν_1 осей, а сечение E^x $(x \in R^{\nu_1})$ производится с помощью ν_2-мерной плоскости, проведенной параллельно последним ν_2 осям.

Однако иногда бывает удобнее поступать по другому (см. ниже пример 2) и иметь дело с проекцией множества E на ν_1-мерную плоскость, натянутую на оси с какими угодно номерами $j_1,\ \ldots,\ j_{\nu_1}$ $(1 \leqslant j_s \leqslant \nu_1 + \nu_2,\ s = 1,\ \ldots,\ \nu_1)$, и проводить сечения множества E, параллельные осям с номерами $i_1,\ \ldots,\ i_{\nu_2}$, где $i_k \neq j_s$ при любых $k \in \mathrm{N}_{\nu_2}$, $s \in \mathrm{N}_{\nu_1}$, $1 \leqslant i_k \leqslant \nu_1 + \nu_2$.

Мы ограничимся здесь лишь этим кратким указанием, которое будет разъяснено далее на примерах.

Пример 1. Пусть $E=\{(x,\ y)\in R^2: y\leqslant x\leqslant 2,\quad xy\geqslant 1,\ x>0\}$,

$$f(x,\ y)=\frac{x^2}{y^2}\quad (y\neq 0).$$

Требуется вычислить двойной интеграл $\int\limits_E f d\mu_2$. Легко понять, что этот интеграл существует и что к нему применимо замечание 5.

Проведем вычисление, используя это замечание.

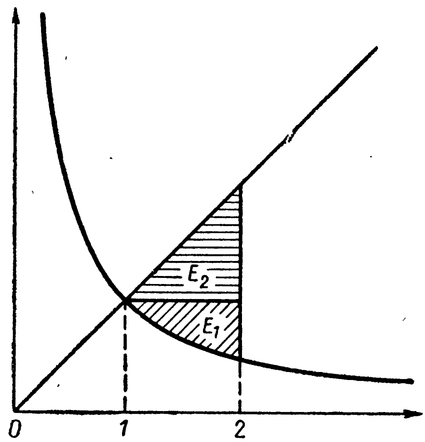

Рис. 17.

Ясно, что

$$E=\Gamma(F_1,\ F_2;\ A),$$

где $A=[1,\ 2]$, $F_1(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in A)$, $F_2(x)=x$ $(x\in A)$ (см. рис. 17). В самом деле, если $(x,\ y)\in\Gamma(F_1,\ F_2;\ A)$, то $1\leqslant\leqslant x\leqslant 2$, $\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x$, и потому $xy\geqslant 1$, $x>0$, т. е. $(xy)\in E$ и потому $\Gamma(F_1,\ F_2;\ A)\subset E$; если же $(x,\ y)\in E$, то $F_1(x)=\frac{1}{x}\leqslant y$, $x\leqslant 2$, $y\leqslant F_2(x)$ по определению множества E; кроме того, $x\geqslant 1$, так как иначе оказалось бы, что $y\geqslant\frac{1}{x}>1$, что противоречит неравенству $y\leqslant x$; значит, $E\subset\Gamma(F_1, F_2;\ A)$ и потому $E=\Gamma(F_1,\ F_2;\ A)$. Стало быть, по замечанию 5

$$\int\limits_E f d\mu_2=\int\limits_A\left[\int\limits_{F_1(x)}^{F_2(x)} f(x,\ y)\,d\mu_1(y)\right]d\mu_1(x).$$

Предположим, что $x\in A$; тогда

$$\int\limits_{F_1(x)}^{F_2(x)} f(x,\ y)\,d\mu_1(y)=\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,d\mu=x^2\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=x^2\left[-\frac{1}{y}\right]\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}=$$

$$=x^2\left[-\frac{1}{x}+x\right]=x^3-x.$$

Наконец, $\int\limits_E f d\mu_2=\int\limits_A (x^3-x)\,d\mu_1(x)=\int\limits_1^2 (x^3-x)\,dx=\frac{9}{4}$.

Разумеется, можно воспользоваться здесь и равенством

$$\int\limits_E f d\mu_2 = \int\limits_{\mathrm{Pr}_{II} E} \left[\int\limits_{{}^y E} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right] d\mu_1(y)$$

(понятно, что в данном случае $\mathrm{Pr}_{II} E = \widetilde{\mathrm{Pr}}_{II} E$).

Читатель легко докажет, что можно представить множество E в виде (см. рис. 17)

$$E = E_1 \cup E_2,$$

где

$$E_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : \frac{1}{2} \leqslant x_2 \leqslant 1,\ \frac{1}{x_2} \leqslant x_1 \leqslant 2 \right\},$$

$$E_2 = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : 1 < x_2 \leqslant 2,\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant 2 \}.$$

Легко понять, что $E_1 \cap E_2 = \Lambda$, так что

$$\int\limits_E f d\mu_2 = \int\limits_{E_1} f d\mu_2 + \int\limits_{E_2} f d\mu_2;$$

$$\int\limits_{E_1} f d\mu_2 = \int\limits_{\mathrm{Pr}_{II} E_1} \left[\int\limits_{{}^y E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right] d\mu_1(y) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx \right] dy =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} \left[\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} x^2 dx \right] dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3y^3} \right] dy = \frac{8}{3} - \frac{15}{12} = \frac{17}{12};$$

$$\int\limits_{E_2} f d\mu_2 = \int\limits_{\mathrm{Pr}_{II} E_2} \left[\int\limits_{{}^y E_2} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right] d\mu_1(y) =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} \left[\int\limits_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx \right] dy = \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{y^2} \left[\frac{8}{3} - \frac{y^3}{3} \right] dy = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6};$$

$$\int\limits_E f d\mu_2 = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}.$$

Этот пример показывает, что для вычислителя не безразличен порядок, в котором производится повторное интегрирование (хотя, конечно, этот порядок никак не сказывается на результате вычислений). Для того чтобы воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница, нам при втором способе вычислений пришлось разбить множество E на подмножества E_1 и E_2. Дело в том, что левые концы промежутка ${}^yE$ ($y \in \mathrm{Pr}_{II} E$) определяются разными элементарными функциями на $\mathrm{Pr}_{II} E_1$ и $\mathrm{Pr}_{II} E_2$: ${}^yE = \left[\frac{1}{y}, 2 \right]$ при $y \in \mathrm{Pr}_{II} E_1$, ${}^yE = [y, 2]$ при $y \in \mathrm{Pr}_{II} E_2$.

Пример 2. Пусть

$$E = \{ (x, y, z) \in R^3 : y^2 \geqslant x^2 + z^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \},$$

$$f(x, y, z) = y \quad ((x, y, z) \in R^3).$$

Требуется вычислить тройной интеграл $\int\limits_E f d\mu_3$. Множество E, очевидно, замкнуто и ограничено, а функция f непрерывна на нем. Итак (см. гл. II, п. 3.9), $f \in L(E, \mu_3)$.

Применим замечание 5. Положим $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$ и найдем $\Pr_{\mathrm{I}} E$. Для этого рассмотрим точку $u = (x, y) \in R^2 = R^{\nu_1}$ и найдем сечение E^u. Если $y^2 < x^2$, то не существует числа z, такого, что $y^2 \geqslant x^2 + z^2$, т. е. $E^u = \Lambda$; если же $y^2 \geqslant x^2$ и $1 \geqslant y \geqslant 0$, то, очевидно, $E^u = \left[-\sqrt{y^2 - x^2}, \sqrt{y^2 - x^2}\right]$. Теперь понятно, что

$$\Pr_{\mathrm{I}} E = \{(x, y) \in R^2 : 1 \geqslant y \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y^2\} =$$
$$= \{(x, y) \in R^2 : 1 \geqslant y \geqslant 0,\ -y \leqslant x \leqslant y\}.$$

Кроме того, $E = \Gamma(F_1, F_2; A)$, где $A = \Pr_{\mathrm{I}} E$, $F_2(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$, $F_1(x, y) = -F_2(x, y)$. Согласно замечанию 5,

$$\int\limits_E f d\mu_3 = \int\limits_A \left[\int\limits_{E^u} f^{(x,y)} d\mu_1\right] d\mu_2.$$

Заметим, что функция $f^{(x,y)}$ постоянна на сечении E^u (все ее значения на этом сечении равны y) и потому

$$\int\limits_{E^u} f^{(x,y)} d\mu_1 = y\mu_1 E^u = y \cdot 2\sqrt{y^2 - x^2}.$$

Значит,

$$\int\limits_E f d\mu_3 = \int\limits_A F d\mu_2, \quad \text{где } F(x, y) = 2y\sqrt{y^2 - x^2} \quad ((x, y) \in A).$$

Вычисление тройного интеграла свелось, таким образом, к вычислению двойного интеграла, которое можно выполнить, еще раз применяя теорему Фубини (точнее, замечание 2 к ней).

Действительно,

$$\int\limits_A F d\mu_2 = \int\limits_{\Pr_{\mathrm{II}} A} \left[\int\limits_{y_A} F(x, y)\, d\mu_1(x)\right] d\mu_2(y) =$$
$$= \int\limits_{[0,1]} \left[\int\limits_{-y}^{y} 2y\sqrt{y^2 - x^2}\, dx\right] dy = \int\limits_0^1 4y \left[\int\limits_0^y \sqrt{y^2 - x^2}\, dx\right] dy =$$
$$= \int\limits_0^1 4y \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{y^2 - y^2 \sin^2 t} \cdot y \cdot \cos t\, dt\right] dy =$$
$$= \int\limits_0^1 4y^3 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt\right) dy = \int\limits_0^1 4y^3 dy \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Однако интеграл можно вычислить значительно проще, если применить сказанное в замечании 6 к теореме Фубини. Будем проектировать множество E на ось ординат, а сечения будем образовывать с помощью плоскостей, параллельных плоскости xz. Точнее, пусть

$$E_y^2 = \{(x, z) \in R^2 : (x, y, z) \in E\},$$

$$\Pr_{II} E = \{y \in R : E_y^2 \neq \Lambda\}.$$

В данном случае легко показать, что

$$\int_E f d\mu_3 = \int_{\Pr_{II} E} \left[\int_{E_y^2} f(x, y, z)\, dx dz \right] dy.$$

Но при $0 \leqslant y \leqslant 1$, очевидно, E_y^2 — замкнутый круг (в R^2) с центром в начале с радиусом y, и при $(x, z) \in E_y^2$ $f(x, y, z) = y$.

Поэтому $\int\limits_{E_y^2} f(x, y, z)\, dx dz = y \int\limits_{E_y^2} 1 \cdot dx dz = y \mu_2 E_y = \pi y^3.$

В то же время $\Pr_{II} E = [0, 1]$ и

$$\int_E f d\mu_3 = \int_0^1 \pi y^3 dy = \frac{\pi}{4}.$$

§ 6. Некоторые приложения интеграла Лебега. Замена переменных в интеграле

Интеграл часто применяется в различных разделах математики и при решении многих естественнонаучных задач. В этом параграфе мы выясним то общее, что свойственно многим задачам, решение которых требует применения интегрального исчисления. Обычно в этих задачах требуется вычислить значение какой-нибудь аддитивной функции множества, зная плотность этой функции. Поэтому первый пункт мы посвящаем определению этого понятия.

6.1. В этом параграфе мы постоянно будем иметь дело с некоторым открытым множеством G пространства R^ν и с системой всех полуоткрытых прямоугольников размерности ν, строго содержащихся в G (см. определение 1 из гл. I, п. 1.5). Эту систему мы обозначим символом $\mathfrak{P}_G^\nu$. Символом $\overline{P}$ мы, как и в гл. I, п. 2.5, будем обозначать замыкание ν-мерного прямоугольника P. Отметим, что $\mu_\nu P = \mu_\nu \overline{P}$.

Определение 1. Пусть λ — конечно-аддитивная функция множества, заданная на $\mathfrak{P}_G^\nu$, и пусть $x \in G$. Предположим, что существует число $\rho(x)$, обладающее следующим свойством:

для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что из условий $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$, $x \in \overline{P}$, $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$ (д. 3, определение 2, п. 5) следует, что $(\rho(x) - \varepsilon)\mu_\nu P \leqslant \lambda P \leqslant (\rho(x) + \varepsilon)\mu_\nu P$. Тогда говорят, что функция λ *имеет плотность в точке* x, а число $\rho(x)$ называют *плотностью функции* λ *в точке* x.

Тот факт, что число $\rho(x)$ есть плотность функции λ в точке x, грубо говоря, означает следующее: значение функции λ на прямоугольнике, замыкание которого содержит точку x, почти пропорционально лебеговой мере этого прямоугольника с коэффициентом пропорциональности $\rho(x)$, т. е.

$$\lambda P = \rho(x)\mu_\nu P + \sigma(P)\mu_\nu P, \tag{1}$$

где число $\sigma(P)$ сколь угодно мало, если диаметр прямоугольника P достаточно мал (т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что $|\sigma(P)| \leqslant \varepsilon$, каков бы ни был прямоугольник $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$, такой, что $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$ и $x \in \overline{P}$).

Теперь мы в состоянии точно поставить ту задачу, о которой уже шла речь: пусть известно, что заданная на множестве G функция ρ такова, при любом $x \in G$ число $\rho(x)$ есть плотность в точке x некоторой аддитивной функции λ, заданной на системе $\mathfrak{P}_G^\nu$. Требуется вычислить $\lambda P \left(P \in \mathfrak{P}_G^\nu\right)$.

Решение этой задачи излагается в следующем пункте. А сейчас — еще несколько слов в связи с понятием плотности.

Разумеется, не всякая аддитивная функция, заданная на системе $\mathfrak{P}_G^\nu$, имеет плотность в данной точке $x \in G$. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $\nu = 1$, $G = (0,1)$ и $\lambda\Delta = \int\limits_\Delta f d\mu_1 \left(\Delta \in \mathfrak{P}_{(0,1)}^1\right)$, где функция f задана в промежутке $(0,1)$ следующим образом: $f(x) = 0$, если $0 < x < \frac{1}{2}$; $f(x) = 1$, если $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$. Проверим, что функция λ в точке $\frac{1}{2}$ не имеет плотности.

Доказательство. Если $\Delta \in \mathfrak{P}_{(0,1)}^\nu$, $\Delta = \left[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}\right)$, то $\lambda\Delta = 0$; если же $\Delta = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta\right)$, то $\lambda\Delta = \delta = \mu_1\Delta$. Значит, имеются прямоугольники $\Delta', \Delta'' \in \mathfrak{P}_{(0,1)}^\nu$ сколь угодно малого диаметра, такие, что $\lambda\Delta' = 0$, $\lambda\Delta'' = \mu_1\Delta'' > 0$, хотя $\frac{1}{2} \in \overline{\Delta}', \overline{\Delta}''$. Значит, функция λ в точке $\frac{1}{2}$ плотности не имеет.

С другой стороны, можно сразу же указать обширный класс аддитивных функций множества, имеющих плотность в каждой точке.

Пример 2. Если функция f непрерывна на открытом множестве $G\ (G \subset R^{\nu})$, а $\lambda P = \int\limits_P f d\mu_{\nu}\ (P \in \mathfrak{P}_G^{\nu})$, то в любой точке $x \in G$ функция λ имеет плотность, равную $f(x)$.

Доказательство. В самом деле,

$$\left[\inf_{t \in \overline{P}} f(t)\right] \mu_{\nu} \overline{P} \leqslant \lambda P \leqslant \left[\sup_{t \in \overline{P}} f(t)\right] \mu_{\nu} \overline{P}$$

($\overline{P}$ — замыкание прямоугольника P), и если ε — произвольное положительное число, то найдется положительное число δ, такое, что для любого прямоугольника $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$, замыкание $\overline{P}$ которого содержит точку x и имеет диаметр, не превосходящий δ, выполняется неравенство

$$\sup_{t \in \overline{P}} f(t) - \inf_{t \in \overline{P}} f(t) \leqslant \varepsilon,$$

так как в силу известной теоремы Вейерштрасса (теорема 2 (д. 3)) $\inf\limits_{t \in \overline{P}} f(t)$ и $\sup\limits_{t \in \overline{P}} f(t)$ суть значения функции f в некоторых точках прямоугольника $\overline{P}$, удаленных от x не более чем на δ. Значит, числа λP и $f(x)\mu_{\nu} P$ принадлежат промежутку $\left[\inf\limits_{t \in \overline{P}} f(t)\mu_{\nu} P,\ \sup\limits_{t \in \overline{P}} f(t)\mu_{\nu} P\right]$, длина которого не превышает $\varepsilon\mu_{\nu} P$, если $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$, $x \in \overline{P}$ и $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$. Но это и означает, что число $f(x)$ есть плотность функции λ в точке x.

Доказательство закончено.

6.2. Только что доказанное утверждение может быть дополнено следующим утверждением.

Теорема 1 (6.II). *Если аддитивная функция λ, заданная на системе $\mathfrak{P}_G^{\nu}$, в любой точке $x \in G$ имеет плотность $\rho(x)$ и если функция ρ непрерывна на множестве G, то $\lambda P = \int\limits_P \rho d\mu_{\nu}$ при всех $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$.*

Этот результат и составляет основу всех применений интеграла Лебега. В нем содержится ответ на вопрос, поставленный в п. 6.1 (см. стр. 198).

Для доказательства теоремы 1 (6.II) нам потребуется следующее утверждение.

Лемма. *Пусть λ и ρ — те же, что и в теореме, пусть $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$. Тогда*

$$\left[\min_{t \in \overline{P}} \rho(t)\right] \mu_{\nu} P \leqslant \lambda P \leqslant \left[\max_{t \in \overline{P}} \rho(t)\right] \mu_{\nu} P \quad \left(P \in \mathfrak{P}_G^{\nu},\ P \neq \Lambda\right).$$

Если $P \neq \Lambda$, то число $\dfrac{\lambda P}{\mu_{\nu} P}$ естественно назвать *средней плотностью* функции λ в прямоугольнике P. Из утверждения леммы следует, что средняя плотность функции λ на замкнутом прямоугольнике заключена между минимальным и максимальным значениями плотности в этом прямоугольнике.

Доказательство леммы. Пусть P $(P \neq \Lambda)$ — прямоугольник, о котором идет речь в формулировке леммы, $P = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_\nu$, где $\Delta_j = [\alpha_j, \beta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$. Разделим каждый из промежутков Δ_j пополам, т. е. рассмотрим промежутки

$$\left[\alpha_j, \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right) = \Delta_j^{(1)}, \quad \left[\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}, \beta_j\right) = \Delta_j^{(2)} \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

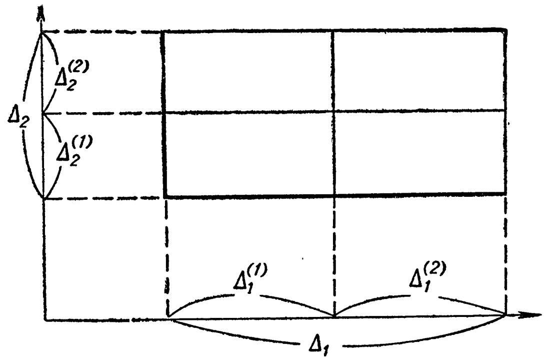

Рис. 18.

В соответствии с этим прямоугольник P окажется разбитым на 2^ν прямоугольников (см. рис. 18). В самом деле, пусть $\sum_\nu$ обозначает множество всех ν-членных семейств $\{\sigma(j)\}$ $(j \in N_\nu)$, члены которых равны 1 или 2. Ясно, что множество $\sum_\nu$ содержит ровно 2^ν элементов. Если $\sigma \in \sum_\nu$, то пусть $P_\sigma = \Delta_1^{\sigma(1)} \times \Delta_2^{\sigma(2)} \times \ldots \times \Delta_\nu^{\sigma(\nu)}$. Легко проверить, что тогда $\bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma_\nu} P_\sigma = P$,

$$P_{\sigma'} \cap P_{\sigma''} = \Lambda, \text{ если } \sigma' \neq \sigma'', \ \operatorname{diam} P_\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{diam} P \quad \left(\sigma \in \textstyle\sum_\nu\right).$$

Предположим, что $\lambda P > M \mu_\nu P$, где M — некоторое число. Тогда найдется положительное число τ, такое, что $\lambda P > (M + \tau)\mu_\nu P$. Убедимся в том, что при некотором $\tilde{\sigma} \in \sum_\nu$

$$\lambda P_{\tilde{\sigma}} > (M + \tau)\, \mu_\nu P_{\tilde{\sigma}}.$$

Допустим противное, т. е. предположим, что

$$\lambda P_\sigma \leqslant (M + \tau)\, \mu_\nu P_\sigma \quad \text{при всех} \quad \sigma \in \textstyle\sum_\nu.$$

Тогда

$$\lambda P = \sum_{\sigma \in \Sigma_\nu} \lambda P_\sigma \leqslant (M + \tau) \sum_{\sigma \in \Sigma_\nu} \mu_\nu P_\sigma = (M + \tau) \cdot \mu_\nu P,$$

что нелепо, так как $\lambda P > (M + \tau)\, \mu_\nu P$.

Итак, мы доказали, что если $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$ и $\lambda P > (M+\tau)\mu_\nu P$, то существует прямоугольник $P_1 (=P_{\tilde{\sigma}})$, обладающий следующими свойствами:

$$P_1 \in \mathfrak{P}_G^{\nu}, \quad P_1 \subset P, \quad \operatorname{diam} P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{diam} P,$$

$$\lambda P_1 > (M+\tau)\mu_\nu P_1.$$

Применяя этот результат к прямоугольнику P_1 (вместо P), мы построим прямоугольник P_2, такой, что

$$P_2 \in \mathfrak{P}_G^{\nu}, \quad P_2 \subset P_1, \quad \operatorname{diam} P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{diam} P_1 = \frac{1}{2^2} \operatorname{diam} P,$$

$$\lambda P_2 > (M+\tau)\mu_\nu P_2.$$

Применяя индукцию, легко доказать, что существует последовательность $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ прямоугольников, такая, что

$$P_j \in \mathfrak{P}_G^{\nu}, \quad P_{j+1} \subset P_j \subset P, \quad \operatorname{diam} P_j = \frac{1}{2^j} \operatorname{diam} P,$$

$$\lambda P_j > (M+\tau)\mu_\nu P_j \text{ при всех } j \in \mathbf{N}.$$

Соответствующая последовательность замкнутых прямоугольников $\{\overline{P}_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям предложения 2 (д. 3, п. 5), и потому найдется точка x, принадлежащая всем прямоугольникам $\overline{P}_j (j \in \mathbf{N})$ (и прямоугольнику $\overline{P}$). Так как, очевидно, $x \in G$, то функция λ имеет в точке x плотность $\rho(x)$, и потому

$$\lambda P_j = \rho(x)\mu_\nu P_j + \sigma(P_j)\mu_\nu P_j \quad (j \in \mathbf{N}),$$

где $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma(P_j) = 0$, так как $x \in \overline{P}_j$ при всех $j \in \mathbf{N}$, и $\lim\limits_{j\to\infty} (\operatorname{diam} P_j) = 0$.

Теперь ясно, что

$$\rho(x)\mu_\nu P_j = \lambda P_j - \sigma(P_j)\mu_\nu P_j > (M+\tau)\mu_\nu P_j - \sigma(P_j)\mu_\nu P_j$$

при всех $j \in \mathbf{N}$, а так как $\mu_\nu P_j > 0 \quad (j \in \mathbf{N})$, то

$$\rho(x) > (M+\tau) - \sigma(P_j) \quad (j \in \mathbf{N}).$$

Используя теорему о предельном переходе в неравенствах, заключаем, что

$$\rho(x) \geqslant M+\tau > M.$$

Итак, мы приходим к следующему выводу: если $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$ и число M таково, что $\lambda P > M\mu_\nu P$, то найдется точка $x \in \overline{P}$, такая, что $\rho(x) > M$. Поэтому, предположив, что $\lambda P > \left[\max\limits_{t \in \overline{P}} \rho(t)\right]\mu_\nu P$, мы получили бы нелепое неравенство $\rho(x) > \left[\max\limits_{t \in \overline{P}} \rho(t)\right]$, где $x \in \overline{P}$. Итак, $\lambda P \leqslant \left[\max\limits_{t \in \overline{P}} \rho(t)\right]\mu_\nu P$, каков бы ни был непустой прямоугольник P, принадлежащий системе $\mathfrak{P}_G^{\nu}$. Неравенство $\left[\min\limits_{t\in\overline{P}} \rho(t)\right]\mu_\nu P \leqslant \lambda P$ доказывается сходными рассуждениями.

Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 1. Пусть $P \in \mathfrak{P}_G^{\nu}$, пусть ε — положительное число. Ввиду того, что $\overline{P} \subset G$, функция ρ непрерывна во всех точках замкнутого прямоугольника $\overline{P}$ и потому равномерно непрерывна на P. Пусть P_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — попарно не пересекающиеся прямоугольники, такие, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = P$ и $\omega(\rho, P_k) \leqslant \varepsilon$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ($\omega(\rho, P_k)$ — колебание функции ρ на множестве P_k (определение 2 из гл. II, п. 1.6)). Составим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, отвечающие разбиению $\tau=\{P_k\}$ $(k \in \mathbf{N}_n)$ множества P. Как известно,

$$s(\rho, \tau, P) \leqslant \int\limits_P f d\mu_\nu \leqslant S(\rho, \tau, P),$$

$$S(\rho, \tau, P) - s(\rho, \tau, P) = \sum_{k=1}^{n} \omega(\rho, P_k)\mu_\nu P_k \leqslant \varepsilon\mu_\nu P.$$

Но вместе с тем $\lambda P = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda P_k$, так что в силу леммы

$$s(\rho, \tau, P) = \sum_{k=1}^{n}\left[\inf_{t\in P_k} \rho(t)\right]\mu_\nu P_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\min_{t\in\overline{P}_k} \rho(t)\right]\mu_\nu P_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda P_k = \lambda P,$$

$$\lambda P = \sum_{k=1}^{n} \lambda P_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left[\max_{t\in\overline{P}_k} \rho(t)\right]\mu_\nu P_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\sup_{t\in P_k} \rho(t)\right]\mu_\nu P_k = S(\rho, \tau, P).$$

Поэтому $\left|\int\limits_P \rho d\mu_\nu - \lambda P\right| \leqslant \varepsilon\mu_\nu P$, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$. Значит, $\int\limits_P \rho d\mu_\nu = \lambda P$.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть функция λ, о которой говорится в теореме, является сужением на множество $\mathfrak{P}_G^{\nu}$ некоторой конечной счетно-аддитивной абсолютно-непрерывной (относительно μ_ν) функции (определение 2 в гл. II, п. 2.3), заданной на $\mathfrak{M}_G^{\nu}$ (ее мы также обозначим буквой λ). Тогда утверждение теоремы может быть дополнено следующим образом: если множество E $(E \subset G)$ измеримо по Лебегу $(E \in \mathfrak{M}_G^{\nu})$ и если плотность ρ (о которой сказано в теореме) суммируема на множестве G относительно меры Лебега μ_ν, то $\lambda E = \int\limits_E \rho d\mu_\nu$.

Доказательство. Если множество E открыто, то, по теореме 2(1.I), существует последовательность попарно не пересекающихся прямоугольников $\{P_s\}_{s=1}^\infty$, такая, что $E = \bigcup\limits_{s=1}^\infty P_s$ и $P_s \in \mathfrak{P}_G^\nu$ $(s \in \mathbf{N})$. Поэтому (теорема 3(2.II))

$$\int\limits_E \rho d\mu_\nu = \sum_{s=1}^\infty \int\limits_{P_s} \rho d\mu_\nu = \sum_{s=1}^\infty \lambda P_s = \lambda E.$$

Пусть теперь E — любое измеримое по Лебегу подмножество множества G. Тогда (следствие 1 к теореме 6(3.I)) $E = \bigcap\limits_{l=1}^\infty G_l \diagdown e$, где $e \subset \bigcap\limits_{l=1}^\infty G_l$, $\mu_\nu e = 0$, $\{G_l\}_{l=1}^\infty$ — убывающая последовательность открытых множеств, $G_l \subset G$ $(l \in \mathbf{N})$. Поэтому (следствие 1 теоремы 3(2.II))

$$\int\limits_E \rho d\mu_\nu = \int\limits_{\bigcap\limits_{l=1}^\infty G_l} f d\mu_\nu = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{G_l} f d\mu_\nu = \lim_{l\to\infty} \lambda G_l = \lambda\left(\bigcap_{l=1}^\infty G_l\right) = \lambda E + \lambda e = \lambda E$$

($\lambda e = 0$ в силу абсолютной непрерывности функции λ).

6.3. Теорема 1(6.II) подсказывает следующий способ вычисления значений аддитивной функции множества λ, заданной на системе $\mathfrak{P}_G^\nu$: сначала находим плотность функции λ во всех точках множества G, и если она непрерывна на множестве G, то каким-нибудь из известных нам способов вычисляем интеграл от плотности.

Но для осуществления этого плана нужно уметь в конкретных случаях доказывать, что значение функции ρ, заданной на множестве G, в каждой точке $x \in G$ есть плотность аддитивной функции λ. Для этого часто оказывается полезной следующая теорема.

Теорема 2(6.II). *Пусть λ — аддитивная функция, заданная на системе $\mathfrak{P}_G^\nu$, а ρ — функция, непрерывная на множестве G. Пусть для любого $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$*

$$m(P)\mu_\nu P \leqslant \lambda P \leqslant M(P)\mu_\nu P,$$

где $M(P) = \sup\limits_{t\in P} \rho(t)$, $m(P) = \inf\limits_{t\in P} \rho(t)$.

Тогда при любом $x \in G$ функция λ имеет плотность, равную $\rho(x)$.

Доказательство. Пусть ε — положительное число и $x \in G$. Тогда найдется такое число $\delta > 0$, что $|\rho(t') - \rho(t'')| \leqslant \varepsilon$, каковы бы ни были t', $t'' \in G$, такие, что $\|t' - x\|_\nu \leqslant \delta$,

$\|t''-x\|_\nu \leqslant \delta$. Пусть теперь $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$, $x \in \overline{P}$, $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$. Тогда числа $M(P)$, $m(P)$, являющиеся, согласно теореме Вейерштрасса, значениями функции ρ в некоторых точках прямоугольника $\overline{P}$, удовлетворяют неравенству $M(P)-m(P) \leqslant \varepsilon$. Кроме того, ясно, что $m(P) \leqslant \rho(x) \leqslant M(P)$. Значит, числа $\rho(x)\mu_\nu P$ и λP содержатся в промежутке $[m(P)\mu_\nu P,\ M(P)\mu_\nu P]$, длина которого не превышает $\varepsilon\mu_\nu P$. Напомним, что это верно при любом прямоугольнике P, таком, что $x \in \overline{P}$, лишь бы $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$. Поэтому число $\rho(x)$ — плотность функции λ в точке x.

Теорема доказана.

Замечание. Читатель заметил, конечно, что в доказательстве были использованы лишь три следующих свойства чисел $m(P)$ и $M(P)$:

а) каковы бы ни были точка $x \in G$ и число $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что $M(P)-m(P) \leqslant \varepsilon$ для всякого P со свойствами: $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$, $x \in \overline{P}$ и $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$;

б) $m(P) \leqslant \rho(t) \leqslant M(P)$ при любом $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$ и любом $t \in P$;

в) $m(P)\mu_\nu P \leqslant \lambda P \leqslant M(P)\mu_\nu P$ при всех $P \in \mathfrak{P}_G^\nu$.

Поэтому верно следующее утверждение, несколько более сильное, чем утверждение теоремы 2.

Пусть λ — аддитивная функция, заданная на системе $\mathfrak{P}_G^\nu$, ρ — функция, заданная на множестве G; если существуют две заданные на системе $\mathfrak{P}_G^\nu$ функции $\widetilde{m}$ и $\widetilde{M}$, обладающие свойствами а), б), в) *(в их формулировке следует теперь m и M заменить на $\widetilde{m}$ и $\widetilde{M}$), то при всяком $x \in G$ функция λ имеет плотность, равную $\rho(x)$.*

Для дальнейшего полезно иметь в виду, что свойство а) можно сформулировать и в других терминах (на „языке последовательностей“): каковы бы ни были точка $x \in G$ и последовательность $\{P_s\}_{s=1}^\infty$ прямоугольников, такая, что $x \in \overline{P_s}$, $P_s \in \mathfrak{P}_G^\nu$ $(s=1, 2, \dots)$ и

$$\lim_{s\to\infty}(\operatorname{diam} P_s)=0,$$

справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty}[\widetilde{M}(P_s)-\widetilde{m}(P_s)]=0.$$

Доказательство равносильности этого утверждения и утверждения а) проводится по известным образцам и предоставляется читателю.

6.4. На первом курсе читатель уже познакомился с некоторыми приложениями интегрального исчисления к задачам геометрии, механики и физики. Поэтому мы ограничимся здесь лишь одним примером, представляющим значительный интерес и хорошо иллюстрирующим теоремы 1 и 2.

Займемся следующей задачей.*

Пусть G — открытое множество в пространстве R^ν и пусть Φ — взаимнооднозначное гладкое отображение множества G в пространство R^ν. Пусть $E \in \mathfrak{M}^\nu$, $E \subset G$. Требуется вычислить меру образа множества E при отображении Φ.

Напомним, что измеримость множества $\Phi[E]$ была установлена в теореме 1 (4.I), но вопрос о вычислении $\mu_\nu \Phi[E]$ остается открытым.

Между тем эта задача сразу сводится к задаче нахождения плотности некоторой аддитивной функции прямоугольника. В самом деле, пусть $P \in \mathfrak{P}^\nu_G$ и пусть $\lambda P = \mu_\nu \Phi[P]$. Функция λ, очевидно, конечно-аддитивна на системе $\mathfrak{P}^\nu_G$. Допустим, что нам удалось доказать существование ее плотности $\rho(x)$ в любой точке $x \in G$ и доказать, что ρ — непрерывная функция. Тогда, по теореме 1 (6.II), сразу получим

$$\mu_\nu \Phi[P] = \int_P \rho d\mu_\nu,$$

после чего не представляет труда заменить в последнем равенстве прямоугольник P любым измеримым множеством E $(E \subset G)$.

Итак, нам нужно найти плотность функции λ. Если бы отображение Φ было аффинным, то мы имели бы $\lambda P = |\det \Phi'| \mu_\nu P$, каков бы ни был прямоугольник (теорема 2 (4.I)); так что в этом случае плотность постоянна и равна $|\det \Phi'(x)| = |\det \Phi|$ при всех $x \in G$. Но любое гладкое отображение Φ вблизи каждой точки x множества G можно хорошо приблизить аффинным отображением $\widetilde{\Phi}$, определитель которого равен якобиану $\det \Phi'(x)$. Поэтому естественно ожидать, что образ $\Phi[P]$ малого прямоугольника P, содержащего точку x, можно с пренебрежимым изменением меры заменить образом $\widetilde{\Phi}[P]$ того же прямоугольника при аффинном отображении $\widetilde{\Phi}$. Но мера множества $\widetilde{\Phi}[P]$ пропорциональна $\mu_\nu P$ с коэффициентом пропорциональности $|\det \widetilde{\Phi}| = |\det \Phi'(x)|$. Вспоминая определение плотности и в особенности сказанное непосредственно перед равенством (1), можно предположить, что плотность функции λ в точке $x \in G$ равна $|\det \Phi'(x)|$. Это предположение соответствует действительности, как показывает следующая теорема.

Теорема 3 (6.II). *Пусть Φ — гладкое взаимнооднозначное отображение открытого множества G пространства R^ν в пространство R^ν, пусть $\det \Phi'(x) \neq 0$ при всех $x \in G$. Пусть*

* Все дальнейшее в этом пункте тесно связано с содержанием добавления 3.

$\lambda P=\mu_\nu \Phi[P]$ $(P\in \mathfrak{P}_G^\nu)$. *Тогда в любой точке* $x\in G$ *функция множества* λ *имеет плотность, равную* $|\det \Phi'(x)|$.

Доказательство. Обозначим число $|\det \Phi'(x)|$ $(x\in G)$ символом $J(x)$. Пусть K — ограниченное открытое множество, содержащееся в множестве G вместе со своей границей.

Мы будем доказывать, что для аддитивной функции λ $(\lambda P=\mu_\nu \Phi[P],\ P\in\mathfrak{P}_G^\nu)$ и функции $\rho=J$ существуют функции $\widetilde{m}$, $\widetilde{M}$, о которых шла речь в замечании к теореме 2(6.II). Если нам удастся построить такие функции, то доказательство теоремы будет закончено.

Сначала оценим сверху меру множества $\Phi[P]$, где P — какой-нибудь квадрат со стороной длины h с центром в точке $\overline{x}\in K$, $P\subset K$.

Для этого рассмотрим образ квадрата P при отображении $[d_{\overline{x}}\Phi]^{-1}\circ\Phi$. Пусть $x'\in P$, $x'=(x_1', \ldots, x_\nu')$, $\overline{x}=(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_\nu)$, $\overline{x}_i-\frac{h}{2}\leqslant x_i'<\overline{x}_i+\frac{h}{2}$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$. Пусть $\overline{z}=(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_\nu)=$ $=([d_{\overline{x}}\Phi]^{-1}\circ\Phi)(\overline{x})=[\Phi'(\overline{x})]^{-1}\Phi(\overline{x})$ и пусть $z'=(z_1', \ldots, z_\nu')=$ $=([d_{\overline{x}}\Phi]^{-1}\circ\Phi)(x')=[\Phi'(\overline{x})]^{-1}\Phi(x')$. Воспользуемся тем, что (в силу гладкости отображения Φ) для любого $\overline{x}\in K$ существует отображение $\sigma_{\overline{x}}$ множества G в пространство R^ν, такое, что

$$\Phi(x')=\Phi(\overline{x})+\Phi'(\overline{x})(x'-\overline{x})+\|x'-\overline{x}\|_\nu\,\sigma_{\overline{x}}(x') \tag{2}$$

при всех $x'\in K$ и $\lim\limits_{x'\to\overline{x}}\sigma_{\overline{x}}(x')=0$ равномерно относительно $\overline{x}\in K$. Последнее означает, что $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$, где $\omega(\delta)=$ $=\sup\limits_{\substack{\overline{x}\in K,\ x'\in K\\ \|\overline{x}-x'\|_\nu<\delta}}\|\sigma_{\overline{x}}(x')\|_\nu$ $(\delta>0)$ (см. д. 3, замечание к предл. 8, п. 7).

Учитывая равенство (2), получим

$$z'-\overline{z}=[\Phi'(\overline{x})]^{-1}(\Phi(x')-\Phi(\overline{x}))=$$
$$=(x'-\overline{x})+[\Phi'(\overline{x})]^{-1}\cdot\|x'-\overline{x}\|_\nu\,\sigma_{\overline{x}}(x'),$$

и потому

$$|z_i'-\overline{z}_i|\leqslant|x_i'-\overline{x}_i|+\Gamma(\overline{x})\cdot\|\sigma_{\overline{x}}(x')\|_\nu\cdot\|x'-\overline{x}\|_\nu\leqslant$$
$$\leqslant\frac{h}{2}+\Gamma(\overline{x})\,\omega(\operatorname{diam}P)\,\nu\cdot\frac{h}{2}\quad(i=1, 2, \ldots, \nu), \tag{3}$$

где $\Gamma(\overline{x})=\|[\Phi'(\overline{x})]^{-1}\|$ (норма матрицы $[\Phi'(\overline{x})]^{-1}$). При этом использовано неравенство $\|x'-\overline{x}\|_\nu\leqslant\frac{\nu}{2}\cdot h$. Но функция

Γ ($\Gamma(x) = \|[\Phi'(x)]^{-1}\|$, $x \in G$) непрерывна (д. 3, следствие предл. 9, п. 7) и потому (по теореме Вейерштрасса) ограничена на замкнутом ограниченном множестве $\overline{K}$ ($\overline{K} = K \cup \partial K$, ∂K — граница множества K). Пусть $\gamma = \max\limits_{x \in \overline{K}} \Gamma(x)$. Тогда $\Gamma(x) \leqslant \gamma$ при всех $x \in K$.

Из неравенства (3) получаем следующее неравенство:

$$|z_i' - \overline{z}_i| \leqslant \frac{h}{2} + \gamma \cdot \omega(\operatorname{diam} P)\, \nu \cdot \frac{h}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{4}$$

При этом мы воспользовались тем, что x', $\overline{x} \in P$, так что $\|x' - \overline{x}\|_\nu \leqslant \operatorname{diam} P$ и $\|\sigma_{\overline{x}}(x')\|_\nu \leqslant \omega(\operatorname{diam} P)$ (см. (2)), а $|x_i' - \overline{x}_i| \leqslant \frac{h}{2}$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). Неравенство (4) означает, что точка z' принадлежит (замкнутому) квадрату $\widetilde{P}$ с центром в точке $\overline{z}$ и со стороной длины $h(1 + \nu \cdot \gamma \cdot \omega(\operatorname{diam} P))$. Но z' — это произвольная точка, принадлежащая образу квадрата P при отображении $[d_{\overline{x}}\Phi]^{-1} \circ \Phi$. Значит,

$$([d_{\overline{x}}\Phi]^{-1} \circ \Phi)[P] \subset \widetilde{P}.$$

Поэтому

$$\mu_\nu(([d_{\overline{x}}\Phi]^{-1} \circ \Phi)[P]) \leqslant h^\nu (1 + \gamma\, \nu\omega(\operatorname{diam} P))^\nu = $$
$$= \mu_\nu P\, (1 + \gamma\, \nu\omega(\operatorname{diam} P))^\nu. \tag{5}$$

Применяя к линейному отображению $[\Phi'(\overline{x})]^{-1}$ теорему 2 (4.I), видим, что левая часть последнего неравенства равна $|\det[d_{\overline{x}}\Phi]^{-1}|\, \mu_\nu \Phi[P] = |\det[\Phi'(\overline{x})]^{-1}|\, \mu_\nu \Phi[P] = (J(\overline{x}))^{-1} \mu_\nu \Phi[P]$, каков бы ни был квадрат $P (P \subset K)$.

Итак, первая наша цель достигнута: мы оценили сверху меру образа произвольного квадрата P, содержащегося в множестве K:

$$\mu_\nu \Phi[P] \leqslant J(\overline{x})\, (1 + \gamma \sqrt{\nu}\omega(\operatorname{diam} P))^\nu \mu_\nu P \leqslant$$
$$\leqslant M(P)\, (1 + \gamma\, \nu\omega(\operatorname{diam} P))^\nu \mu_\nu P, \tag{6}$$

где $\overline{x}$ — центр квадрата P, $\gamma = \max\limits_{x \in \overline{K}} \|[\Phi'(x)]^{-1}\|$, $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$, а $M(E) = \sup\limits_{x \in E} J(x)$ ($E \subset G$).

Следующая наша цель такова: оценить сверху меру образа любого открытого множества $D (D \subset K)$ при отображении Φ.

Пусть D — открытое множество, $D \subset K$. Как известно, существует последовательность полуоткрытых квадратов $\{P_s\}_{s=1}^{\infty}$, такая, что $D = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} P_s$, $P_{s'} \cap P_{s''} = \Lambda$ ($s' \neq s''$) (теорема 2 (1.I)).

Заметим теперь, что в силу взаимной однозначности отображения Φ

$$\Phi[P_{s'}] \cap \Phi[P_{s''}] = \Lambda \quad (s' \neq s'').$$

Поэтому, учитывая оценку (6), получим

$$\mu_\nu \Phi[D] = \mu_\nu\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} \Phi[P_s]\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_\nu \Phi[P_s] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{\infty} M(P_s)\left(1 + \gamma\, \nu\omega(\operatorname{diam} P_s)\right)^\nu \mu_\nu P_s. \tag{7}$$

Используя неравенство (7), получим

$$\mu_\nu \Phi[D] \leqslant M(D)\left(1 + \gamma\, \nu\omega(\operatorname{diam} D)\right)^\nu \sum_{s=1}^{\infty} \mu_\nu P_s =$$

$$= M(D)\left(1 + \gamma\, \nu\omega(\operatorname{diam} D)\right)^\nu \mu_\nu D. \tag{8}$$

При этом мы воспользовались тем очевидным обстоятельством, что $\omega(\operatorname{diam} P_s) \leqslant \omega(\operatorname{diam} D)$ при всех $s \in \mathbf{N}$.

Теперь мы будем оценивать $\mu_\nu \Phi[P]$ снизу. Для этого обратимся к отображению $\Psi := \Phi^{-1}$, которое задано на множестве $\Phi[G]$. Это множество открыто, а отображение Ψ гладко (д. 3, следствие теоремы 6, предл. 9, п. 7). Кроме того, $\Psi'(\Phi(x)) = [\Phi'(x)]^{-1}$ при всяком $x \in G$.

Множество $\widetilde{K} = \Phi[K]$ открыто; оно также и ограничено, так как $\widetilde{K} \subset \Phi[\overline{K}]$, а образ ограниченного и замкнутого множества $\overline{K}$ $(\overline{K} \subset G)$ при непрерывном отображении Φ — снова ограниченное и замкнутое множество (следствие теоремы 2 (д. 3)). Ясно, что $\overline{\widetilde{K}} \subset \Phi[\overline{K}] \subset \Phi[G]$. Итак, $\widetilde{K}$ — открытое ограниченное множество, содержащееся в $\Phi[G]$ вместе со своей границей.

Оценка (8) (с соответствующими изменениями в обозначениях) применима к отображению Ψ, множеству $\widetilde{K}$ и к любому открытому множеству $\widetilde{D}$, содержащемуся в $\widetilde{K}$. Точнее,

$$\mu_\nu \Psi[\widetilde{D}] \leqslant \sup_{y \in \widetilde{D}} |\det \Psi'(y)| \left(1 + \tilde{\gamma}\, \nu\tilde{\omega}(\operatorname{diam} \widetilde{D})\right)^\nu \mu_\nu \widetilde{D}, \tag{9}$$

каково бы ни было открытое множество $\widetilde{D}$. Здесь

$$\tilde{\gamma} = \max_{y \in \overline{\widetilde{K}}} \left\| [\Psi'(y)]^{-1} \right\|,$$

а $\tilde{\omega}$ — некоторая неубывающая неотрицательная функция, заданная на промежутке $(0, +\infty)$ и такая, что

$$\lim_{\delta \to +0} \tilde{\omega}(\delta) = 0.$$

Пусть теперь P — какой-нибудь прямоугольник, содержащийся в множестве K. Рассмотрим открытый прямоугольник $\mathring{P}$ (см. гл. I, п. 2.5) и применим неравенство (9) к множеству $\widetilde{D}=\Phi[\mathring{P}]$. (Это множество открыто (следствие теоремы 6 (д. 3)) и, очевидно, содержится в $\widetilde{K}$.) При этом нужно учесть, что

$$\Psi[\widetilde{D}]=\Psi[\Phi[\mathring{P}]]=\Phi^{-1}[\Phi[\mathring{P}]]=\mathring{P}$$

и если $y\in\widetilde{D}$, то $\Psi(y)\in\mathring{P}$ и потому

$$\begin{aligned}|\det\Psi'(y)|&=|\det(\Phi^{-1})'(y)|=|\det(\Phi'(\Psi(y)))^{-1}|=\\&=|\det\Phi'(\Psi(y))|^{-1}\leqslant(m(\mathring{P}))^{-1}=(m(P))^{-1},\end{aligned}\tag{10}$$

где $m(E)=\inf\limits_{x\in E}J(x)$ $(E\subset G)$ $(m(\mathring{P})=m(P)$ из-за непрерывности функции $J)$.

Поскольку неравенство (10) справедливо при любом $y\in\widetilde{D}$, то

$$\sup_{y\in\widetilde{D}}|\det\Psi'(y)|\leqslant(m(P))^{-1}.$$

Из неравенства (9) теперь получаем

$$\mu_\nu\mathring{P}\leqslant(m(P))^{-1}\left(1+\widetilde{\gamma}\,\nu\,\widetilde{\omega}(\operatorname{diam}\Phi[P])\right)^\nu\mu_\nu\Phi[\mathring{P}],$$

или

$$\mu_\nu\Phi[\mathring{P}]\geqslant m(P)\left(1+\widetilde{\gamma}\nu\widetilde{\omega}(\operatorname{diam}\Phi[P])\right)^{-\nu}\mu_\nu\mathring{P}.$$

Остается вспомнить, что $\mu_\nu(P\setminus\mathring{P})=0$. Значит, по замечанию к теореме 1(4.I), $\mu_\nu\Phi[P\setminus\mathring{P}]=0$ и $\mu_\nu\Phi[P]=\mu_\nu\Phi[\mathring{P}]$. Итак,

$$\mu_\nu\Phi[P]\geqslant m(P)\left(1+\widetilde{\gamma}\nu\widetilde{\omega}(\operatorname{diam}\Phi[P])\right)^{-\nu}\mu_\nu P,\tag{11}$$

каков бы ни был прямоугольник P, содержащийся в множестве K.

Неравенства (6) и (11) можно объединить, записав их в следующей форме:

$$\widetilde{m}(P)\,\mu_\nu P\leqslant\lambda P\leqslant\widetilde{M}(P)\,\mu_\nu P,\tag{12}$$

каков бы ни был прямоугольник P, содержащийся в K. Здесь

$$\begin{aligned}\widetilde{m}(P)&=m(P)\left(1+\widetilde{\gamma}\,\nu\,\widetilde{\omega}(\operatorname{diam}\Phi[P])\right)^{-\nu},\\\widetilde{M}(P)&=M(P)\left(1+\gamma\nu\omega(\operatorname{diam}P)\right)^\nu.\end{aligned}\tag{13}$$

Ясно, что множитель при $m(P)$ не больше единицы, а множитель при $M(P)$ не меньше единицы, так что

$$\tilde{m}(P) \leqslant m(P),\ M(P) \leqslant \tilde{M}(P),$$
$$\tilde{m}(P) \leqslant J(x) \leqslant \tilde{M}(P) \tag{14}$$

при любом $P \in \mathfrak{P}_K^{\nu}$ и $x \in P$.

Значит, функции $\tilde{m}$ и $\tilde{M}$, заданные на системе $\mathfrak{P}_K^{\nu}$, обладают свойствами б) и в), перечисленными в замечании к теореме 2(6.II) (при $\rho = J$). Проверим, что они обладают также свойством а).

Используем формулировку этого свойства на языке последовательностей (см. п. 6.3). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L(P) &= (1 + \gamma\, \nu\, \omega(\operatorname{diam} P))^{\nu}, \\ l(P) &= (1 + \tilde{\gamma}\, \nu\, \tilde{\omega}(\operatorname{diam} \Phi\, [P]))^{\nu} \end{aligned} \quad (P \in \mathfrak{P}_K^{\nu}),$$

так что $\tilde{m}(P) = l(P)\, m(P)$, $\tilde{M}(P) = L(P)\, M(P)$ $(P \in \mathfrak{P}_K^{\nu})$ (см. (13)).

Пусть $\{P_s\}_{s=1}^{\infty}$ — какая-нибудь последовательность прямоугольников $P_s \in \mathfrak{P}_K^{\nu}$ $(s \in \mathbf{N})$, такая, что $\lim\limits_{s \to \infty} (\operatorname{diam} P_s) = 0$. Тогда $\lim\limits_{s \to \infty} [\tilde{M}(P_s) - \tilde{m}(P_s)] = \lim\limits_{s \to \infty} L(P_s)\, [M(P_s) - m(P_s)] + \lim\limits_{s \to \infty} m(P_s)\, [L(P_s) - l(P_s)]$. Теперь остается заметить, что $\lim\limits_{s \to \infty} L(P_s) = \lim\limits_{s \to \infty} (1 + \gamma^{\nu}\, \omega(\operatorname{diam} P_s))^{\nu} = 1$, $\lim\limits_{s \to \infty} l(P_s) = \lim\limits_{s \to \infty} (1 + \tilde{\gamma}\, \nu\, \tilde{\omega}(\operatorname{diam} \Phi\, [P_s]))^{-\nu} = 1$, так как $\lim\limits_{s \to \infty} (\operatorname{diam} \Phi\, [P_s]) = 0$ в силу равномерной непрерывности отображения Φ на множестве K; $\lim\limits_{s \to \infty} [M(P_s) - m(P_s)] = 0$ в силу равномерной непрерывности функции J на множестве K, а последовательность $\{m(P_s)\}_{s=1}^{\infty}$ ограничена (например, числом $M(K)$).

Значит, $\lim\limits_{s \to \infty} [\tilde{M}(P_s) - \tilde{m}(P_s)] = 0$, и условие а) выполнено.

Итак, функции $\tilde{m}$ и $\tilde{M}$, заданные на $\mathfrak{P}_K^{\nu}$, обладают свойствами а), б), в), перечисленными в замечании к теореме 2(6.II). Поэтому функция $\lambda|_K$ — сужение функции λ на систему $\mathfrak{P}_K^{\nu}$ — в любой точке $x \in K$ имеет плотность, равную $J(x) = |\det \Phi'(x)|$. Но тогда функция λ тоже имеет в любой точке $x \in K$ ту же плотность $J(x)$. Действительно, пусть ε — произвольное положительное число, а $x \in K$. Тогда найдется такое число $\eta > 0$, что

$$|(\lambda|_K)\, P - J(x)\, \mu_{\nu} P| \leqslant \varepsilon \mu_{\nu} P,$$

каков бы ни был прямоугольник P, такой, что $P \in \mathfrak{P}^{\nu}_K$, $\overline{x \in \overline{P}}$, и $\operatorname{diam} P \leqslant \eta$. Множество K открыто, и потому найдется такое число $\delta_x > 0$, что шар радиуса δ_x с центром в точке x целиком содержится в K. Пусть $\delta = \min(\eta, \delta_x)$. Если $P \in \mathfrak{P}^{\nu}_G$, $x \in \overline{P}$, и $\operatorname{diam} P \leqslant \delta$, то $\overline{P}$ содержится в упомянутом шаре и тем более в K, так что $\lambda|_K P = \lambda P$; кроме того, $\operatorname{diam} P \leqslant \eta$ и потому

$$|\lambda P - J(x)\mu_\nu P| \leqslant \varepsilon \mu_\nu P,$$

каков бы ни был прямоугольник P, принадлежащий системе $\mathfrak{P}^{\nu}_K$ и такой, что

$$\operatorname{diam} \overline{P} \leqslant \delta, \quad x \in \overline{P}.$$

Значит, плотность функции λ в любой точке $x \in K$ существует и равна $J(x)$. Но ведь каждая точка $x \in G$ может быть заключена в открытое ограниченное множество K, содержащееся в G со своей границей. Значит, плотность функции λ равна $J(x)$ при всех $x \in G$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть Φ — гладкое взаимнооднозначное отображение открытого множества G пространства R^ν в пространство R^ν,* $\det \Phi'(x) \neq 0$ *при всех $x \in G$. Если E — измеримое множество, $E \subset G$, то и множество $\Phi[E]$ измеримо и*

$$\mu_\nu \Phi[E] = \int\limits_E |\det \Phi'| \, d\mu_\nu$$

($|\det \Phi'|$ *означает функцию, заданную на G следующим образом:* $|\det \Phi'|(x) = |\det \Phi'(x)|$ $(x \in G)$).

Доказательство. Измеримость множества $\Phi[E]$ была доказана в теореме 1 (4.I).

Пусть $\{P_s\}_{s=1}^{\infty}$ — последовательность попарно не пересекающихся полуоткрытых квадратов, $\overline{P}_s \subset G$ $(s = 1, 2, \ldots)$, такая, что $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} P_s = G$ (теорема 2 (1.I)). Тогда $\mu_\nu \Phi[E] = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu_\nu \Phi[E \cap P_s]$.

Ясно, что $\mu_\nu \Phi[E \cap P_s] = \mu_\nu \Phi[E \cap \overset{\circ}{P}_s]$ $(s = 1, 2, \ldots)$, так как $\mu_\nu(P_s \setminus \overset{\circ}{P}_s) = 0$, $\mu_\nu \Phi[P_s \setminus \overset{\circ}{P}_s] = 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ (см. замечание к теореме 1 (4.I)).

Но множество $\overset{\circ}{P}_s$ открыто, содержится в G вместе со своим замыканием и ограничено. Поэтому непрерывная функция $|\det \Phi'|$ суммируема на $\overset{\circ}{P}_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Значит, по замечанию к теореме 1,

$$\mu_\nu \Phi[E \cap \overset{\circ}{P}_s] = \int\limits_{E \cap \overset{\circ}{P}_s} |\det \Phi'| \, d\mu_\nu = \int\limits_{E \cap P_s} |\det \Phi'| \, d\mu_\nu \quad (s \in \mathbf{N}).$$

Наконец, ввиду неотрицательности подынтегральной функции, получаем

$$\mu_\nu \Phi[E] = \sum_{s=1}^{\infty} \int_{E \cap P_s} |\det \Phi'| \, d\mu_\nu = \int_{\bigcup_{s=1}^{\infty}(E \cap P_s)} |\det \Phi'| \, d\mu_\nu = \int_E |\det \Phi'| \, d\mu_\nu.$$

Следствие доказано.

6.5. Пусть G и Φ обозначают то же, что и в последнем следствии, и пусть на множестве $\Phi[G]$ задана суммируемая функция f. С ней естественным образом можно связать функцию $f \circ \Phi$, заданную на множестве G. Оказывается, что произведение этой функции на функцию $|\det \Phi'|$ суммируемо на множестве G и

$$\int_G (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\mu_\nu = \int_{\Phi[G]} f d\mu_\nu.$$

Это — так называемая „формула замены переменных". Иногда интеграл, стоящий слева, легче вычислить, чем интеграл справа, — или потому, что функция $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ проще устроена, чем f, или потому, что к множеству G легче применить теорему Фубини, чем к $\Phi[G]$ (см. ниже примеры).

Теорема 4 (6.II). *Пусть G — открытое множество в пространстве R^ν, Φ — взаимнооднозначное гладкое отображение множества G в пространство R^ν, $\det \Phi'(x) \neq 0$ при всех $x \in G$. Пусть E — измеримое по Лебегу множество, $E \subset G$, f — функция, заданная на множестве $\Phi[E]$. Если верно одно из включений*

$$f \in L(\Phi[E], \mu_\nu), \quad (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \in L(E, \mu_\nu),$$

то верно и другое, и

$$\int_{\Phi[E]} f d\mu_\nu = \int_E (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, d\mu_\nu.$$

Доказательство. Сначала отметим, что если функция f измерима на множестве $\Phi[E]$, то функция $f \circ \Phi$ измерима на множестве E. В самом деле, пусть Δ — какой-нибудь промежуток. Тогда

$$\{x \in E : (f \circ \Phi)(x) \in \Delta\} = \Psi[\{x \in \Phi[E] : f(x) \in \Delta\}].$$

Множество $\{x \in \Phi[E] : f(x) \in \Delta\}$ измеримо, так как f — измеримая функция (см. п. 3.1 гл. I, определение 1), а множество $\Psi[\{x \in \Phi[E] : f(x) \in \Delta\}]$ измеримо в силу следствия к теореме 3, которое нужно применить к отображению Ψ (напомним, что $\Psi = \Phi^{-1}$).

Пусть функция f неотрицательна. Пусть τ — какое-нибудь разбиение множества $\Phi[E]$. Ему соответствует разбиение $\tau_1 = \{\Phi^{-1}(e)\}$ $(e \in \tau)$ множества E. При этом

$$\sum_{e \in \tau} M(f, e) \mu_\nu e = \sum_{e' \in \tau_1} M(f \circ \Phi, e') \int_{e'} |\det \Phi'| \, d\mu_\nu. \qquad (15)$$

Если $f \in L(\Phi[E], \mu_\nu)$, а $\tau \in T(f, \Phi[E])$, то первая, а потому и вторая суммы в последнем равенстве конечны. Но ведь

$$M(f\circ\Phi, e')\int_{e'} |\det \Phi'|\, d\mu_\nu \geqslant \int_{e'} (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|\, d\mu_\nu \quad (e' \in \tau_1),$$

так что

$$\sum_{e'\in\tau_1}\int_{e'} (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu = \int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu < +\infty$$

$$\text{и } (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| \in L(E, \mu_\nu).$$

Разбиение τ можно выбрать так, чтобы соответствующая сумма Дарбу в (15) не превышала $\int_{\Phi[E]} f d\mu_\nu + \varepsilon$, где ε — любое наперед заданное положительное число. Поэтому

$$\int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu \leqslant \int_{E[\Phi]} f d\mu_\nu. \tag{16}$$

Если $f \overline{\in} L(\Phi[E], \mu_\nu)$, то неравенство (16) справедливо тривиальным образом.

Рассмотрим теперь функцию $f_1 = (f\circ\Phi)|\det\Phi'|$. Ясно, что $f_1\circ\Psi = (f\circ\Phi\circ\Psi)(|\det\Phi'|\circ\Psi) = f\cdot\dfrac{1}{|\det\Psi'|}$, $\Psi[\Phi[E]] = E$.

Воспользуемся неравенством (16), где f следует заменить на f_1, отображение Φ — на отображение Ψ, а множество E — на множество $\Phi[E]$. Тогда получим

$$\int_{\Phi[E]} (f_1\circ\Psi)|\det\Psi'|\, d\mu_\nu \leqslant \int_{\Psi[\Phi[E]]} f_1 d\mu_\nu,$$

т. е.

$$\int_{\Phi[E]} f d\mu_\nu \leqslant \int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu. \tag{17}$$

Если $(f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| \in L(E, \mu_\nu)$, то правая часть в (17) конечна и $f \in L(\Phi[E], \mu_\nu)$. Из (16) и (17) вытекает, что

$$\int_{\Phi[E]} f d\mu_\nu = \int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu, \tag{18}$$

какова бы ни была неотрицательная функция f, измеримая на множестве $\Phi[E]$. Если функция f измерима на множестве $\Phi[E]$ и принимает значения разных знаков, то равенство (18) нужно применить к функциям f^+ и f^-. Тогда из суммируемости функции f на множестве $\Phi[E]$ будет следовать конечность интегралов $\int_{\Phi[E]} f^+ d\mu_\nu$, $\int_{\Phi[E]} f^- d\mu_\nu$ и интегралов $\int_E (f^+\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu$, $\int_E (f^-\circ\Phi)|\det\Phi'|\, d\mu_\nu$. Остается заметить, что

$$(f\circ\Phi)|\det\Phi'| = (f^+\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| - (f^-\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|,$$

так что $(f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'| \in L(E, \mu_\nu)$ и справедливо равенство (18).

Столь же просто доказывается, что из включения $(f\circ\Phi)\times$ $\times|\det\Phi'|\in L(E, \mu_\nu)$ следует включение $f\in L(\Phi[E], \mu_\nu)$ и равенство (18).

Доказательство закончено.

6.6. Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Пусть $f\in L(E, \mu_\nu)$, $E\subset R^\nu$; и пусть $x_0\in R^\nu$ и пусть $f_{x_0}(x)=f(x-x_0)$ $(x\in E+x_0)$.* Тогда $f_{x_0}\in L(E+x_0, \mu_\nu)$ и $\int\limits_{E+x_0} f_{x_0}d\mu_\nu=\int\limits_E fd\mu_\nu$.

В частности, если $E=R^\nu$, то $\int\limits_{R^\nu} f_{x_0}d\mu_\nu=\int\limits_{R^\nu} fd\mu_\nu$.

Это сразу следует из теоремы о замене переменных; нужно в качестве отображения Φ рассмотреть сдвиг на вектор $x_0:\Phi(x)=x+x_0$ $(x\in R^\nu)$ и учесть, что $\det\Phi'(x)=1$ $(x\in R^\nu)$.

Пример 2. Пусть φ — функция, заданная в промежутке (α, β), имеющая во всех его точках производную $\varphi'(x)\neq 0$, причем функция φ' непрерывна на (α, β). Ясно, что в этом случае φ — строго монотонная функция. Пусть f — функция, суммируемая по Лебегу в промежутке Δ с концами $\lim\limits_{x\to\alpha+0}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta-0}\varphi(x)$. Тогда функция $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ суммируема в промежутке (α, β) и

$$\int\limits_\Delta f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

(по поводу обозначений см. гл. II, п. 1.5).

Это равенство хорошо знакомо читателю-второкурснику: он познакомился с ним, еще будучи студентом первого курса, правда, в предположении непрерывности функции f в промежутке Δ, конечности промежутка $[\alpha, \beta]$ и непрерывности функции φ' на $[\alpha, \beta]$.

Пример 3. Читатель уже знаком с Γ-функцией (пример 2 в конце п. 3.10). Сейчас мы докажем следующий факт:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^{a-1}}{(z+1)^{a+b}}\,dz,$$

каковы бы ни были положительные числа a и b.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_a:F_a(x)=$ $=e^{-x}x^{a-1}$ $(x\in(0, +\infty),\ a>0)$ и применим формулу примера 2, полагая $\alpha=0$, $\beta=+\infty$, $\varphi(t)=zt$, $t>0$, $z>0$. Тогда получим

---

* $E+x_0=\{y\in R^\nu: y=x+x_0,\ x\in E\}$.

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} F_a(x)\,dx=\int_0^{+\infty} F_a(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=$$
$$=z\int_0^{+\infty} e^{-zt}(zt)^{a-1}dt=z^a\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^{a-1}dt \quad (a>0).$$

Значит, $\frac{\Gamma(a)}{z^a}=\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^{a-1}dt$ при всех положительных z и a, и потому

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+z)^{a+b}}=\int_0^{+\infty} e^{-(z+1)t}t^{a+b-1}dt \quad (a,\ b>0).$$

Рассмотрим функцию Φ, заданную на множестве $(0,\ +\infty)\times\times(0,\ +\infty)\subset R^2$ следующим образом:

$$\Phi(t,\ z)=e^{-(z+1)t}t^{a+b-1}z^{a-1} \quad ((t,\ z)\in(0,\ +\infty)\times(0,\ +\infty)).$$

Это — положительная и непрерывная, а потому и измеримая функция. Значит (следствие 2 к теореме 3(5.II)),

$$\iint\limits_{(0,\ +\infty)\times(0,\ +\infty)}\Phi\,d\mu_2=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t(z+1)}t^{a+b-1}z^{a-1}dt\right]dz=$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(a+b)}{(1+z)^{a+b}}z^{a-1}dz;$$

$$\iint\limits_{(0,\ +\infty)\times(0,\ +\infty)}\Phi\,d\mu_2=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t(z+1)}t^{a+b-1}z^{a-1}dz\right]dt=$$
$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-tz}z^{a-1}dz\right]e^{-t}t^{a+b-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(a)}{t^a}e^{-t}t^{a+b-1}dt=$$
$$=\Gamma(a)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}dt=\Gamma(a)\,\Gamma(b).$$

Итак, $\int_0^{+\infty}\frac{z^{a-1}}{(1+z)^{a+b}}dz=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Мы уже умеем вычислять значения функции Γ в положительных целых точках. Формула приведения (см. п. 3.10) позволяет выразить значения $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ через $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

В самом деле,

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}+1\right)=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)=$$
$$=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}+1\right)=\ldots=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3}{2^{n-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ниже (в примере 5) мы докажем, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, так что окончательно

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n} \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Используя этот результат, можно дать следующую формулу для ν-мерной меры Лебега ν-мерного шара радиуса r (см. § 5):

$$\mu_\nu(\mathbf{D}^\nu(0,\ r))=\frac{\pi^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}\,r^\nu.$$

Предоставляем читателю вывести эту формулу из формул (12) и (16) предыдущего параграфа.

Теперь мы можем написать

$$\mu_{2m}(\mathbf{D}^{2m}(0,\ r))=r^{2m}\frac{\pi^m}{\Gamma(m+1)}=\frac{\pi^m r^{2m}}{m!},$$

$$\mu_{2m-1}\left(\mathbf{D}^{2m-1}(0,\ r)\right)=r^{2m-1}\frac{\pi^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\pi^{m-1}r^{2m-1}}{(2m-1)!!}\,2^m \quad (m=1,\ 2,\ldots).$$

Пример 4. Пусть Φ — отображение открытого прямоугольника $G=(0,\ +\infty)\times(-\pi,\ \pi)$ в множество R^2, заданное следующим образом: $\Phi(r,\ \varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ $((r,\ \varphi)\in G)$. Легко видеть, что Φ — гладкое взаимнооднозначное отображение,

$$\Phi[G]=R^2\setminus\{(x,\ y)\in R^2 : x\leqslant 0,\ y=0\}.$$

Иными словами, Φ — взаимнооднозначно и гладко отображает прямоугольник G на плоскость R^2, из которой удалена вещественная отрицательная полуось, или, как принято говорить, на плоскость, „разрезанную" вдоль отрицательной вещественной полуоси. Если $(x,\ y)\in\Phi[G]$, а $\Phi^{-1}((x,\ y))=(r,\ \varphi)$, то числа r и φ называют *полярными координатами точки* $(x,\ y)$; их геометрический смысл хорошо известен. Подсчитаем якобиан отображения Φ

$$\det\Phi'(r,\ \varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi, & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

Как видим, $\det\Phi'(r,\ \varphi)>0$ при всех $(r,\ \varphi)\in G$.

Пусть теперь E — измеримое (по Лебегу) подмножество множества R^2. Рассмотрим пересечение $E\cap\Phi[G]$; очевидно, $\mu_2 E=\mu_2(E\cap\Phi[G])$. Пусть $\widetilde{E}=\Phi^{-1}[E\cap\Phi[G]]$.

Пользуясь следствием теоремы 3, получим

$$\mu_2 E=\mu_2\Phi[\widetilde{E}]=\int_{\widetilde{E}}\det\Phi'\,d\mu_2=\iint_{\Phi^{-1}[E]} r\,dr\,d\varphi. \tag{19}$$

Таким образом, полярные координаты (точнее, отображение Φ) можно использовать для вычисления лебеговой меры любого измеримого множества E, хотя бы и не содержащегося целиком в $\Phi[G]$.

Пусть, например, нам нужно вычислить меру множества $E=\{(x, y)\in R^2 : (x^2+y^2)^2<a^2(x^2-y^2)\}$. Множество E измеримо, так как его можно представить в виде $f^{-1}[(0, +\infty)]$, где f — непрерывная, а потому и измеримая функция, заданная в R^2 равенством $f(x, y)=a^2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2$ $((x, y)\in R^2)$. Пусть

$$E_+=E\cap\{(x, y)\in R^2 : x\geqslant 0\},$$
$$E_-=E\cap\{(x, y)\in R^2 : x\leqslant 0\}.$$

Легко видеть, что $E=E_+\cup E_-$ и что оба множества E_+ и E_- измеримы (как пересечение измеримых множеств). Более того, $\mu_2 E_+=\mu_2 E_-$. В самом деле, очевидно, $E_-=U[E_+]$, где U — ортогональное отображение (отражение в оси ординат), задаваемое равенством $U(x, y)=(-x, y)$ $((x, y)\in R^2)$. Поэтому ввиду инвариантности меры Лебега относительно движений (см. § 4 гл. I) $\mu_2 E_-=\mu_2 E_+$ и $\mu_2 E=2\mu_2 E_+$. Найдем теперь множество $\widetilde{E}=\Phi^{-1}[E_+]$. Заметим для этого, что $\Phi^{-1}[f^{-1}[(0, +\infty)]]=(f\circ\Phi)^{-1}[(0, +\infty)]$, так что

$$\widetilde{E}=\{(r, \varphi)\in G : r\cos\varphi>0,\ a^2(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi)-$$
$$-(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2>0\}=\{(r, \varphi)\in G : r\cos\varphi>0,$$
$$r^2(a^2\cos 2\varphi-r^2)>0\}=\{(r, \varphi)\in G : \cos\varphi>0\}\cap$$
$$\cap\{(r, \varphi)\in G : r^2<a^2\cos 2\varphi\}.$$

Воспользуемся формулой (19); для вычисления двойного интеграла применим теорему Фубини ($\nu_1=\nu_2=1$, $\nu=2$). Найдем проекцию множества на ось ординат:

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}}\widetilde{E}=\{\varphi\in(-\pi, \pi) : {}^{\varphi}\widetilde{E}\neq\Lambda\}=\Big\{\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \text{существует}$$
$$\text{число } r>0 \text{ и такое, что } r^2<a^2\cos 2\varphi\Big\}=$$
$$=\left\{\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \cos 2\varphi>0\right\}=\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Найдем сечение множества $\widetilde{E}$:

$${}^{\varphi}\widetilde{E}=\{r\in(0, +\infty) : (r, \varphi)\in\widetilde{E}\}=(0, a\sqrt{\cos 2\varphi})\quad \left(\varphi\in\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Наконец, находим

$$\mu_2 E = 2\mu_2 E_+ = 2\iint\limits_{\widetilde{E}} r dr d\varphi = 2 \int\limits_{\Pr_{II}\widetilde{E}} \left[\int\limits_{\varphi_E} r dr\right] d\varphi =$$

$$= 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr\right] d\varphi = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\cos 2\varphi}{2} d\varphi = a^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Может возникнуть такой вопрос: а нельзя ли было воспользоваться теоремой Фубини сразу же, не применяя замены переменных? Дело в том, что непосредственное нахождение проекции и сечений множества E_+ — задача более трудная, чем нахождение проекции и сечений его „изображения" $\widetilde{E}$ в полярных координатах.

Решая эту задачу, мы совершенно не интересовались тем, как выглядит множество E, — нам это было не нужно. Конечно, вычисляя меру какого-нибудь множества, приятно наглядно представить себе его; пользуясь теми же полярными координатами, читатель легко сделает соответствующий эскиз.

При известном навыке в не очень сложных случаях такой эскиз может быть даже полезен: глядя на него, можно сразу же выписать проекцию и сечения множества $\widetilde{E}$ без подробных и формальных рассуждений, подобных только что проведенным.

Пример 5. Вычислим теперь $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Применим результат примера 2 и положим $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$, $\varphi(t) = t^2$ $(t \in (\alpha; \beta))$, $f(x) = e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}$ $(x > 0)$. Тогда получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \frac{1}{t} 2t dt = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Рассмотрим теперь заданную в R^2 функцию F: $F(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $((x, y) \in R^2)$. Так как функция F положительна и непрерывна (а стало быть, измерима по Лебегу на множестве R^2), то, по теореме Тонелли (следствие 2 теоремы 3 (5.II)),

$$\iint\limits_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} F d\mu_2 = \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} F(x, y) dx\right] dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\right] dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right] dy =$$

$$=\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)=\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Воспользуемся теперь для вычисления того же двойного интеграла теоремой о замене переменных и тем же отображением Φ, что в примере 4, т. е., говоря попросту, полярными координатами. Получим

$$\iint\limits_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} F d\mu_2 = \iint\limits_{\Phi^{-1}[(0,+\infty)\times(0,+\infty)]} (F\circ\Phi)\det\Phi' d\mu_2 = \iint\limits_{(0,+\infty)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi.$$

Полученный двойной интеграл подсчитаем, снова пользуясь теоремой Тонелли:

$$\iint\limits_{(0,+\infty)\times\left(0,+\frac{\pi}{2}\right)} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\right]d\varphi =$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-r^2} r\,dr.$$

Последнее равенство написано на основании следствия 1 теоремы 3 (2.II). Интеграл, стоящий под знаком предела, легко вычислить, пользуясь формулой Лейбница—Ньютона. Получим

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-r^2} r\,dr = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^n = \frac{1}{2}\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Наконец, получим

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \iint\limits_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} F d\mu_2 = \frac{\pi}{4},\quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\left(\text{ведь по теореме 2 (2.II)} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \geqslant 0\right) \text{ и } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Попутно мы вычислили часто встречающийся в теории вероятностей интеграл Эйлера—Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Заметим, что первообразная подынтегральной функции в интеграле Эйлера—Пуассона не является элементарной функцией. Это обстоятельство затрудняет применение формулы Лейбница—Ньютона. Использование полярных координат упрощает подынтегральную функцию: вместо интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ приходится вычислять интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,tdt$; теперь уже первообразную найти очень легко.

В примерах 3 и 5 мы вычисляли интегралы от положительных функций. Введение бесконечного интеграла (гл. II, п. 3.10) избавило нас от необходимости каждый раз заранее убеждаться в суммируемости этих функций, а теорема Тонелли (следствие 2 теоремы 3 (5.II)) позволяет не проверять законность перестановки интегрирований при вычислении повторных интегралов. Таким образом, усилия, затраченные в первых параграфах этой главы на построение теории интеграла (в частности, и бесконечного), окупаются при решении конкретных задач „на вычисление".

Пример 6. Найти лебегову меру множества точек $E = \{(x, y) \in R^2 : (x+y)^4 < ax^2y,\ x > 0,\ y > 0\}$.

Измеримость этого множества проверяется так же, как в примере 4. Непосредственное применение теоремы Фубини здесь затруднительно: нелегко определить сечение множества E. Рассмотрим отображение Φ : $\Phi(r, \varphi) = (r\cos^2\varphi, r\sin^2\varphi)$ множества $G = (0, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в R^2. Легко видеть, что отображение Φ взаимнооднозначно и гладко отображает множество G на прямоугольник $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Вычислим якобиан отображения Φ:

$$\det\Phi'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi, & \sin^2\varphi \\ -2r\cos\varphi\sin\varphi, & 2r\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = \\ = 2r\sin\varphi\cos\varphi \quad ((r, \varphi) \in G).$$

По следствию теоремы 3 (6.II),

$$\mu_2 E = \iint\limits_{\Phi^{-1}[E]} 2r\sin\varphi\cos\varphi\, drd\varphi.$$

Множество $\Phi^{-1}[E]$ можно описать следующим образом:

$$\widetilde{E} = \Phi^{-1}[E] = \{(r, \varphi) \in G : (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi)^4 < ar^2\cos^4\varphi\, r\sin^2\varphi\} = \\ = \{(r, \varphi) \in G : r < a\cos^4\varphi\sin^2\varphi\}.$$

Легко найти проекцию множества $\widetilde{E}$ на ось ординат и сечения множества $\widetilde{E}$ (мы применяем теорему Фубини ($\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu = 2$)):

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}}\widetilde{E} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad {}^{\varphi}\widetilde{E} = (0,\ a\cos^4\varphi\sin^2\varphi) \quad \left(\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Теперь можно вычислять двойной интеграл:

$$\mu_2 E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{a\cos^4\varphi\sin^3\varphi} 2rdr \right] \sin\varphi\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^9\varphi\sin^5\varphi d\varphi = \frac{a^2}{210}.$$

Пример 7. Найдем координаты центра тяжести части эллипсоида, расположенной в первом октанте. Как известно из механики, центр тяжести ограниченного множества $V (V \subset R^3)$ есть точка

$$\left(\frac{1}{\mu_3 V} \int_V x d\mu_3, \ \frac{1}{\mu_3 V} \int_V y d\mu_3, \ \frac{1}{\mu_3 V} \int_V z d\mu_3 \right)$$

(здесь x, y, z — функции, заданные на множестве R^3 следующим образом:

$$x(x_1, x_2, x_3) = x_1, \ y(x_1, x_2, x_3) = x_2, \ z(x_1, x_2, x_3) = x_3$$
$$((x_1, x_2, x_3) \in R^3)).$$

Интересующее нас множество таково:

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} < 1, \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0 \right\},$$

где a, b, c — некоторые положительные числа.

Для вычисления тройных интегралов воспользуемся эллиптическими координатами. Пусть $G = (0, 1) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, Φ — отображение множества G на множество V

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (ar\cos\varphi\sin\theta, \ br\sin\varphi\sin\theta, \ cr\cos\theta).$$

Ясно, что Φ — гладкое взаимнооднозначное отображение; $\det \Phi'(r, \theta, \varphi) = abcr^2\sin\theta$, как показывает несложное вычисление.

Теорема о замене переменных приводит к интегралам по прямоугольнику G:

$$\mu_3 V = \iiint_G abcr^2 \sin\theta \, d\, rd\theta d\varphi =$$

$$= abc \int_0^1 r^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right] dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{abc}{3};$$

$$\int_V x d\mu_3 = \int_G (x \circ \Phi) \det \Phi' d\mu_3 = \iiint_G ar\cos\varphi\sin\theta \, abcr^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= a^2bc \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \frac{a^2bc}{4} \cdot \frac{\pi}{4};$$

$$\int\limits_V y\,d\mu_3 = \iiint\limits_G br\sin\varphi\sin\theta\, abcr^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,dy =$$

$$= ab^2c\int\limits_0^1 r^3dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{ab^2c}{4}\cdot\frac{\pi}{4};$$

$$\int\limits_V z\,d\mu_3 = \iiint\limits_G cr\cos\theta\, abcr^2\sin\theta\, dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= abc^2\int\limits_0^1 r^3dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{abc^2}{4}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Итак, центр тяжести части эллипсоида, расположенной в первом октанте, находится в точке

$$P = \left(\frac{3}{8}a,\ \frac{3}{8}b,\ \frac{3}{8}c\right).$$

Глава III

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Несобственные интегралы

Конструкция, использованная в гл. II, приводит к построению интеграла для функций весьма широкого класса. Однако в некоторых случаях (в частности, при решении ряда задач математической физики) представляется необходимым несколько расширить понятие интеграла, пополнив область его задания некоторыми несуммируемыми функциями. Разумеется, все суммируемые функции будут интегрируемы и в этом новом смысле, и новый, или, как мы будем говорить, несобственный* интеграл для этих функций будет совпадать с обычным.

Наибольший интерес представляют несобственные интегралы от функций одной переменной, на которых мы в дальнейшем останавливаемся более подробно. Однако само определение несобственного интеграла от функции одного переменного (если давать единое определение, а не рассматривать многочисленные частные случаи, которые потом неизбежно нужно согласовывать между собой) ничуть не проще, чем соответствующее определение для функций любого числа переменных, что и побудило нас рассматривать сразу общий случай. Ниже мы всегда считаем, даже когда это не оговорено, что все рассматриваемые множества и функции измеримы.

1.1. Определение 1. Пусть $\mathfrak{M}_E$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества E и $\mathfrak{A}$ — система измеримых подмножеств (т. е. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_E$), удовлетворяющая условиям:

1) для любых множеств A_1 и A_2 из системы $\mathfrak{A}$ существует множество $A_3 \in \mathfrak{A}$, такое, что $A_3 \supset A_1 \cup A_2$;

---

* Термин „несобственный интеграл" употребляется в большинстве руководств по интегральному исчислению. Мы обращаем внимание знакомого с этими книгами читателя на возникающую разницу в терминологии. Суммируемые функции, определенные в гл. II, могут быть неограниченными или заданными на множестве бесконечной меры. Независимо от указанных возможностей все интегралы от суммируемых функций рассматриваются нами как „собственные".

2) множество $B = E \setminus \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ имеет меру нуль;

3) существует счетная система множеств $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, такая, что для всякого множества A $(A \in \mathfrak{A})$ найдется множество $A' \in \mathfrak{A}'$, содержащее A.

Систему $\mathfrak{A}$ со свойствами 1)—3) будем называть *нормальной системой подмножеств множества E*.

Замечание. Нормальная система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества E содержит последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами:

1) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

2) для всякого множества $A \in \mathfrak{A}$ существует натуральное число n, такое, что $A \subset A_n$.

Таким образом, мы утверждаем, что счетную систему множеств $\mathfrak{A}'$, существование которой постулировано в условии 3) определения 1, можно образовать с помощью возрастающей последовательности множеств.

Доказательство. Пусть φ — взаимнооднозначное отображение множества $\mathbf{N}$ на множество $\mathfrak{A}'$. Обозначим $\varphi(n)$ через A'_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Возьмем множества $A_n \in \mathfrak{A}$ так, что

$$A_1 = A'_1, \ A_2 \supset A_1 \cup A'_2, \ \ldots, \ A_n \supset A_{n-1} \cup A'_n, \ \ldots$$

Существование таких множеств A_n гарантируется условием 1) определения 1. Легко видеть, что последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — требуемая.

Определение 2. Возрастающую последовательность множеств, удовлетворяющую условию 3) определения 1, будем называть *фундаментальной последовательностью системы* $\mathfrak{A}$.

Приведем примеры нормальных систем.*

Пример 1. $E = R^{\nu}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\infty)$ — система всевозможных замкнутых шаров.**

Пример 2. $E = R^{\nu}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0(\infty)$ — система всех замкнутых шаров с центром в нуле.

Пример 3. $E = R^{\nu}$, c — точка множества R^{ν}, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(c)$ — система дополнений ко всевозможным открытым шарам, содержащим точку c.

Пример 4. $E = R^{\nu}$, c — точка множества R^{ν}, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0(c)$ — система дополнений ко всевозможным открытым шарам с центром в точке c.

Пример 5. $E = R^{\nu}$, $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — точки множества R^{ν}, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — система всевозможных множеств вида $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$, где $A_i \in \mathfrak{A}(c_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

---

* Мы везде предполагаем, что все рассматриваемые множества измеримы, т. е. являются элементами некоторого σ-кольца $\mathfrak{M}$.

** Здесь и далее мы опускаем в обозначении системы значок „ν", указывающий на размерность пространства.

Аналогично образуются системы $\mathfrak{A}(c_1, c_2, \ldots, c_m, \infty)$, $\mathfrak{A}_0(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ и $\mathfrak{A}_0(c_1, c_2, \ldots, c_m, \infty)$.

Пример 6. Если $\mathfrak{A}$ — некоторая нормальная система подмножеств множества E и E_1 — измеримое подмножество множества E, то всевозможные множества $A \cap E_1$ $(A \in \mathfrak{A})$ образуют нормальную систему подмножеств множества E_1. Эту систему мы будем обозначать $\mathfrak{A} \cap E_1$.

Определение 3. Будем говорить, что *система $\mathfrak{A}$ допустима для функции f*, измеримой на множестве E, если $\mathfrak{A}$ — нормальная система подмножеств множества E и функция f суммируема на каждом множестве A $(A \in \mathfrak{A})$.

Замечание 1. Если функция f суммируема на множестве E, то, очевидно, любая нормальная система множеств допустима для функции f.

Замечание 2. Для каждой почти везде конечной измеримой функции f, определенной на множестве E, существует допустимая система подмножеств множества E.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где * $\mu B_n < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$

Допустимую систему для функции f мы получим, рассматривая, например, всевозможные множества

$$A = \{x \in E\colon |f(x)| < a\} \cap B_n \quad (0 < a < +\infty,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Замечание доказано.

Замечание 3. Если для функции f существует хоть одна допустимая система, то функция f конечна почти везде на E.

Если система $\mathfrak{A}$ допустима для функции f, измеримой на множестве E, то можно попытаться определить интеграл от функции f по множеству E (на котором функция f, вообще говоря, не суммируема) как предел интегралов $\int\limits_A f d\mu$ $(A \in \mathfrak{A})$ при „возрастании" A.

Определение 4. Пусть φ — произвольная функция множества, определенная на некоторой нормальной системе множеств $\mathfrak{A}$. Конечное число J называется *пределом функции φ* по системе $\mathfrak{A}$ (запись: $J = \lim\limits_{\mathfrak{A}} \varphi(A)$), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, такое, что для любого множества A $(A \in \mathfrak{A})$, содержащего A_ε, выполняется неравенство

$$|\varphi(A) - J| < \varepsilon.$$

Читатель легко заметит аналогию понятия предела функции φ по системе $\mathfrak{A}$ с хорошо известным понятием предела числовой последовательности (роль номера n играют теперь множества $A \in \mathfrak{A}$, неравенству $n > N_\varepsilon$ соответствует включение $A \supset A_\varepsilon$).

---

* Если $\mu E < +\infty$, то можно взять $B_n = E$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Внося обычные изменения в определение 4, мы получим определение бесконечного предела.

Нас будут интересовать лишь функции множества φ, заданные следующим образом:

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu \quad (A \in \mathfrak{A}),$$

где f — функция, измеримая на множестве E, $\mathfrak{A}$ — допустимая система для функции f и $A \in \mathfrak{A}$.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{A}$ — допустимая система для функции f, измеримой на множестве E. *Несобственным интегралом от функции f по множеству E относительно системы* $\mathfrak{A}$ называется (конечный или нет) предел $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \int_A f d\mu$, который мы обозначаем $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$.

Если $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \int_A f d\mu$ существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$ сходится, а в противном случае — расходится. Термин „несобственный“ мы для краткости будем часто опускать.

Замечание 1. Пусть система $\widetilde{\mathfrak{A}}$ состоит из всех множеств системы $\mathfrak{A}$, содержащих некоторое множество A_0 $(A_0 \in \mathfrak{A})$. Тогда, как мы сразу видим из определения предела, интегралы $\int\limits_{(E, \widetilde{\mathfrak{A}})} f d\mu$ и $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$ существуют или нет одновременно и если существуют, то равны.

Систему $\widetilde{\mathfrak{A}}$ будем называть подобной системе $\mathfrak{A}$.

Примеры несобственных интегралов.

1) $E = R^1$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0(\infty)$, f — нечетная измеримая ограниченная функция. Тогда

$$\int\limits_{(R^1, \mathfrak{A}_0(\infty))} f d\mu = \lim_{\mathfrak{A}_0(\infty)} \int_{-a}^{a} f d\mu_1 = \lim_{\mathfrak{A}_0(\infty)} 0 = 0.$$

2) $E = R^1$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\infty)$, $f: f(x) = \sin x$ $(x \in R^1)$. В этом случае $\lim\limits_{\mathfrak{A}(\infty)} \int_a^b \sin x dx$ * не существует.

3) $E = R^1$, $\mathfrak{A}$ — система промежутков вида

$$[-2n\pi, (2n+1)\pi] \ (n = 1, 2, \ldots), \ f: f(x) = \sin x \ (x \in R^1).$$

* По поводу обозначений интеграла см. гл. II, п. 1.5.

Очевидно,

$$\int\limits_{(R^1,\, \mathfrak{A})} \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-2\pi n}^{(2n+1)\pi} \sin x\,dx = 2.$$

4)

$$E=[-1,\ +1],\ \mathfrak{A}=\mathfrak{A}(0)\cap[-1,\ +1],\ f\colon f(x)=\frac{1}{x}\ (x\in R^1\diagdown\{0\}).$$

Тогда

$$\int\limits_{(E,\, \mathfrak{A})} \frac{dx}{x} = \lim_{\mathfrak{A}} \left[\int\limits_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int\limits_{h}^{+1} \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\mathfrak{A}} 0 = 0.$$

Замечание 2. Если $E\subset R^1$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\infty)\cap E$, то, очевидно, существование интеграла $\int\limits_{(E,\, \mathfrak{A})} f d\mu$ равносильно существованию предела $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_{[a,\, b]\cap E} f d\mu$.

Читатель легко убедится в том, что аналогичное утверждение справедливо в случае, когда вместо системы $\mathfrak{A}(\infty)$ берутся системы $\mathfrak{A}_0(c_1,\ \ldots,\ c_k,\ \infty)$ или $\mathfrak{A}_0(c_1,\ \ldots,\ c_n,\ \infty)$.

Несобственный интеграл по лебеговой мере* $\int\limits_{(\langle a,\, b\rangle,\ \mathfrak{A}(c_1,\ \ldots,\ c_m,\ \infty)\cap\langle a,\, b\rangle)} f(x)\,dx$ мы будем обозначать через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. В случае, когда f — суммируемая функция, это не повлечет за собой противоречия (см. теорему 4).

Тот факт, что промежуток $\langle a,\ b\rangle$ может как содержать, так и не содержать точки a или b, не отражается на существовании и величине $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (так как одноточечные множества $\{a\}$ и $\{b\}$ имеют меру нуль), так что и в этом отношении введенное обозначение не может привести к недоразумениям.

Несобственные интегралы (по лебеговой мере) $\int\limits_{(\langle a,\, b\rangle,\ \mathfrak{A}_0(c_1,\ \ldots,\ c_m,\ \infty)\cap\langle a,\, b\rangle)} f(x)\,dx$ называются интегралами в смысле главного значения по Коши и обозначаются v. p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.**

В обозначении $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\left(\text{v.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx\right)$ не содержится

---

* Символом $\langle a,\ b\rangle$ мы обозначаем промежуток с концами a и b (безразлично, какой именно: замкнутый, открытый или полуоткрытый).

** v. p. суть начальные буквы слов valeur principale — главное значение (франц.).

указаний на то, какие точки $c_1, c_2, \ldots, c_m$ участвуют в образовании системы $\mathfrak{A}(c_1, \ldots, c_m, \infty)$ (соответственно, $\mathfrak{A}_0(c_1, \ldots, c_m, \infty)$). Ниже мы покажем (см. следствие 2 к теореме 5), что можно брать любые точки при условии, что получающаяся система будет допустимой для функции f.

Приведем необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла.

Теорема 1 (1.III). (*Критерий сходимости несобственного интеграла.*) *Пусть $\mathfrak{A}$ — допустимая система для функции f, измеримой на множестве E. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого числа $\varepsilon > 0$ существовало множество $B_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, такое, что для любых множеств $A, A' \in \mathfrak{A}$, содержащих B_ε, выполнялось неравенство*

$$\left| \int\limits_A f d\mu - \int\limits_{A'} f d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Установим сначала, что условие теоремы необходимо. В самом деле, для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется, по определению 4, множество $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, такое, что $\left| \int\limits_A f d\mu - \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $A \supset A_\varepsilon$ $(A \in \mathfrak{A})$. Тогда при $A \supset A_\varepsilon$, $A' \supset A_\varepsilon$ $(A, A' \in \mathfrak{A})$ имеем

$$\left| \int\limits_A f d\mu - \int\limits_{A'} f d\mu \right| \leqslant \left| \int\limits_A f d\mu - \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu \right| + \left| \int\limits_{A'} f d\mu - \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu \right| < \varepsilon.$$

Докажем теперь достаточность. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность множеств для системы $\mathfrak{A}$. Из условия теоремы следует, что числа $x_n = \int\limits_{A_n} f d\mu$ образуют сходящуюся в себе последовательность, которая, следовательно, имеет конечный предел J. Убедимся, что $J = \lim\limits_{\mathfrak{A}} \int\limits_A f d\mu$. В самом деле, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_ε, такое, что $|x_{n_\varepsilon} - J| < \varepsilon$. Кроме того, мы можем (в силу фундаментальности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$) выбрать число n_ε так, чтобы $A_{n_\varepsilon} \supset B_\varepsilon$. Тогда при $A \in \mathfrak{A}$ и $A \supset A_\varepsilon = A_{n_\varepsilon}$ имеем

$$\left| J - \int\limits_A f d\mu \right| \leqslant \left| J - \int\limits_{A_\varepsilon} f d\mu \right| + \left| \int\limits_{A_\varepsilon} f d\mu - \int\limits_A f d\mu \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

1.2. В этом пункте будут рассмотрены основные свойства несобственных интегралов.

Теорема 2 (1.III). *Пусть функции f и g измеримы на множестве E и $h=\alpha f+\beta g$ (α, β — конечные числа). Если интегралы $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f d\mu = J_1$ и $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g d\mu = J_2$ сходятся, то интеграл $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} h d\mu$ также сходится и*

$$\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} h d\mu = \alpha \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f d\mu + \beta \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g d\mu.$$

Доказательство. Так как $\int\limits_{A} h d\mu = \alpha \int\limits_{A} f d\mu + \beta \int\limits_{A} g d\mu$, то интеграл $\int\limits_{A} h d\mu$ конечен для любого множества A ($A \in \mathfrak{A}$), и поэтому система $\mathfrak{A}$ допустима для функции h.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдутся множества $A_\varepsilon^{(1)}$, $A_\varepsilon^{(2)} \in \mathfrak{A}$, такие, что

$$\left| \int\limits_{A} f d\mu - J_1 \right| < \varepsilon \quad \text{при } A \supset A_\varepsilon^{(1)} \ (A \in \mathfrak{A}) \text{ и}$$

$$\left| \int\limits_{A} g d\mu - J_2 \right| < \varepsilon \quad \text{при } A \supset A_\varepsilon^{(2)} \ (A \in \mathfrak{A}).$$

Зафиксировав множества A_ε, $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, $A_\varepsilon \supset A_\varepsilon^{(1)} \cup A_\varepsilon^{(2)}$, мы при условии $A \supset A_\varepsilon$ ($A \in \mathfrak{A}$) получим

$$\left| \int\limits_{A} h d\mu - (\alpha J_1 + \beta J_2) \right| \leqslant |\alpha| \left| \int\limits_{A} f d\mu - J_1 \right| + |\beta| \left| \int\limits_{A} g d\mu - J_2 \right| < $$
$$< (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

Это и означает, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \int\limits_{A} h d\mu = \alpha J_1 + \beta J_2$.

Следствие. *Пусть $h = f + g$. Тогда из сходимости двух из трех интегралов $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f d\mu$, $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g d\mu$, $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} h d\mu$ следует сходимость третьего и равенство*

$$\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} h d\mu = \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f d\mu + \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g d\mu.$$

Замечание 1. По индукции теорема распространяется на любое число слагаемых.

Замечание 2. Существование интеграла $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} h d\mu$ и равенство $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} h d\mu = \alpha J_1 + \beta J_2$ можно доказать, предполагая лишь, что интегралы J_1 и J_2 существуют и хоть один из них (но не обязательно оба) сходится.

Остановимся еще на одной простой, но полезной теореме.

Теорема 3 (1.III). *(О замене переменной в несобственном интеграле.) Пусть G_1, G_2 — открытые подмножества пространства R^ν, Φ — гладкое взаимнооднозначное отображение множества G_1 на множество G_2, удовлетворяющее условию* $\det\Phi'(x)\neq 0$ $(x\in G_1)$. *Пусть, далее, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — нормальные системы измеримых по Лебегу подмножеств множеств G_1 и G_2 соответственно, причем $\mathfrak{A}_2=\{\Phi[A]:A\in\mathfrak{A}_1\}$, и пусть f — функция, измеримая (по Лебегу) на множестве G_2. Тогда интегралы* $\int\limits_{(G_2,\,\mathfrak{A}_2)} f d\mu_\nu$, $\int\limits_{(G_1,\,\mathfrak{A}_1)} (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|d\mu_\nu$ *существуют или нет одновременно и если существуют, то равны.*

Доказательство немедленно следует из равенства

$$\int\limits_{\Phi[A]} f d\mu_\nu=\int\limits_{A}(f\circ\Phi)\,|\det\Phi'|\,d\mu_\nu$$

(см. теорему 4 (6.II)).

Замечание. В частности, для интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и строго монотонной непрерывно-дифференцируемой функции Φ, определенной на множестве $E=(p,\ q)$ и такой, что $\lim\limits_{t\to p+0}\Phi(t)=a$, $\lim\limits_{t\to q-0}\Phi(t)=+\infty$, справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_p^{q} f(\Phi(t))\,|\Phi'(t)|\,dt.$$

На примерах мы уже видели, что несобственный интеграл может существовать и у функций, не имеющих интеграла в обычном смысле $\left(\text{например, v.p.}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x},\ \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx\right.$ и т. д. (см. гл. II, п. 2.5)$\Bigg)$.

Вместе с тем из теоремы, которую мы сейчас докажем, следует, что для функции f, имеющей интеграл $\int\limits_E f d\mu$, никакого „исправления“ при переходе к несобственному интегралу не происходит, и последний оказывается всегда равным $\int\limits_E f d\mu$.

Теорема 4 (1.III). *(Перманентность несобственного интеграла.) Пусть функция f имеет интеграл на множестве E*

и $\mathfrak{A}$ — произвольная допустимая для функции f система подмножеств множества E. Тогда $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f d\mu$ *существует и равен* $\int\limits_E f d\mu$.

Замечание. В частности, несобственный интеграл от неотрицательной измеримой функции всегда существует и сходится тогда и только тогда, когда функция суммируема. Отсюда видно, что несобственный интеграл от неинтегрируемой на множестве E измеримой функции может сходиться лишь благодаря тому, что система множеств $\mathfrak{A}$ выбирается так, чтобы интегралы $\int\limits_A f^+ d\mu$ и $\int\limits_A f^- d\mu$ $(A \in \mathfrak{A})$ „почти взаимно уничтожались“, и именно это влечет существование конечного предела для интегралов $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A f^+ d\mu - \int\limits_A f^- d\mu$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Доказательство теоремы. Пусть сначала $f(x) \geqslant 0$ $(x \in E)$. Возьмем фундаментальную последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ системы $\mathfrak{A}$. Очевидно,

$$\int\limits_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \int\limits_A f d\mu.$$

Ясно, что для всякого числа l, $l < \int\limits_E f d\mu$, найдется множество A_{n_0}, такое, что $l < \int\limits_{A_{n_0}} f d\mu \leqslant \int\limits_E f d\mu$. Тогда и подавно для всякого множества A $(A \in \mathfrak{A})$, содержащего множество A_{n_0}, $l < \int\limits_A f d\mu \leqslant \int\limits_E f d\mu$, что и означает (ввиду произвольности числа l), что $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \int\limits_A f d\mu = \int\limits_E f d\mu$.

Общий случай мы получаем немедленно с помощью теоремы 2 (и замечания 2 к ней, если функция f не суммируема), примененной к разности $f^+ - f^- = f$.

Теорема доказана.

Построенное нами расширение понятия интеграла достигается, конечно, ценой утраты ряда важных свойств „собственного“ интеграла. Так, например, из сходимости интеграла $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f d\mu$ не вытекает существование интеграла $\int\limits_{(E_1,\,\mathfrak{A}_1)} f d\mu$, где E_1 — измеримое подмножество множества E, а $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \cap E_1$. Примером могут служить интегралы v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ и $\int\limits_{(E_1,\,\mathfrak{A}_1)} \sin x dx$, где $E_1 = [0, +\infty)$ и $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0(\infty) \cap [0, +\infty)$.

Справедлива, однако, следующая теорема.

Теорема 5 (1.III). *Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальная система подмножеств множества E, E_1 — измеримое подмножество множества E, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \cap E_1$, $E_2 = E \setminus E_1$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \cap E_2$. Пусть, далее, f — измеримая функция, определенная на множестве E. Тогда*

а) *если интеграл $J_1 = \int\limits_{(E_1, \mathfrak{A}_1)} f d\mu$ сходится, то интеграл** $J' = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} \chi_{E_1} f d\mu$ тоже сходится и $J' = J_1$;*

б) *если сходятся интегралы J_1 и $J_2 = \int\limits_{(E_2, \mathfrak{A}_2)} f d\mu$, то сходится и интеграл $J = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$, причем $J = J_1 + J_2$;*

в) *если $E \subset R^1$, $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}} \cap E$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — одна из систем $\mathfrak{A}(c_1, \ldots, c_n, \infty)$, $\mathfrak{A}_0(c_1, \ldots, c_n, \infty)$, то из сходимости двух из трех интегралов J, J_1, J_2 вытекает сходимость третьего интеграла и равенство $J = J_1 + J_2$.*

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{A}$ и $A_1 = E_1 \cap A$, то функция f суммируема на A_1, и поэтому функция $f\chi_{E_1}$ суммируема на A. Таким образом, $\mathfrak{A}$ — допустимая система для функции $f\chi_{E_1}$. Теперь из равенства $\int\limits_A f\chi_{E_1} d\mu = \int\limits_{A_1} f d\mu$ мы, переходя к пределу, получаем утверждение пункта а) теоремы. Утверждение б) сейчас же следует из равенства $f = f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2}$, уже доказанного п. а), и следствия к теореме 2 (1.III).

При доказательстве утверждения в) мы для краткости письма ограничимся случаем, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\infty) \cap E$. Все другие случаи рассматриваются совершенно аналогично.

Случай, когда сходятся интегралы J_1 и J_2, уже исчерпан, и поэтому мы, для определенности, будем считать, что сходятся интегралы J и J_1. Нам достаточно убедиться в сходимости интеграла J_2. Сходимость же интеграла $\int\limits_{(E_2, \mathfrak{A}_2)} f d\mu$ равносильна (см. замечание 2 к определению 5) существованию конечного предела $\lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_{E_2 \cap [a, b]} f d\mu$. Последний предел в самом деле существует и конечен, как это следует из соотношений

---

* Через χ_A мы всегда обозначаем характеристическую функцию множества $A : \chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \overline{\in} A. \end{cases}$

$$E_2 \cap [a, b] = (E \cap [a, b]) \setminus (E_1 \cap [a, b]),$$
$$\int\limits_{E_2 \cap [a, b]} f d\mu = \int\limits_{E \cap [a, b]} f d\mu - \int\limits_{E_1 \cap [a, b]} f d\mu \xrightarrow[\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}]{} J - J_1.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть функция f суммируема на множестве E_1 $(E_1 \subset E)$, $E_2 = E \setminus E_1$ и интеграл $\int\limits_{(E_2, \mathfrak{A}_2)} f d\mu$ сходится. Тогда сходится и интеграл $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$, причем*

$$\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu = \int\limits_{E_1} f d\mu + \int\limits_{(E_2, \mathfrak{A}_2)} f d\mu.$$

Следствие 2. *Пусть $E = \langle a, b \rangle$, а*

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(c_1', \ldots, c_l', \infty) \cap \langle a, b \rangle \text{ и } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(c_1, \ldots, c_k; \infty) \cap \langle a, b \rangle$$

— допустимые системы для функции f. Тогда интегралы $I' = \int\limits_{(E, \mathfrak{A}')} f d\mu$ и $I = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f d\mu$ сходятся или нет одновременно и если сходятся, то равны.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(c_1, c_2, \ldots, c_k, d, \infty) \cap E$ и $d \overline{\in} \overline{E}$. В этом случае следствие справедливо, ввиду того что системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ имеют общую подобную систему (см. замечание 1 к определению несобственного интеграла). В качестве множества A_0, фигурирующего в определении подобной системы, можно взять любое множество $A \in \mathfrak{A}$; так как $d \overline{\in} \overline{E}$, то $E \in \mathfrak{A}'$. Пусть теперь по-прежнему $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(c_1, c_2, \ldots, c_k, d, \infty) \cap E$, но точка d на этот раз произвольна. Так как система $\mathfrak{A}$ допустима для функции f, то найдется промежуток $[d - \delta, d + \delta]$, не содержащий точек $c_1, \ldots, c_k$ и такой, что функция f суммируема на множестве $E_1 = E \cap [d - \delta, d + \delta]$. Положим $E_2 = E \setminus E_1$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \cap E_2$, $\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}' \cap E_2$. Так как $d \overline{\in} \overline{E}_2$, то, как уже доказано, интегралы $\int\limits_{(E_2, \mathfrak{A}_2)} f d\mu$, $\int\limits_{(E_2, \mathfrak{A}_2')} f d\mu$ сходятся или нет одновременно и если сходятся, то равны. Остается сослаться на следствие 1. Очевидно, что следствие 2 справедливо в том случае, когда одно из множеств $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, $\{c_1', c_2', \ldots, c_l'\}$ содержится в другом. Если же это не так, то сводим дело к последнему случаю, образуя множество $\{c_1, \ldots, c_k\} \cap \{c_1', \ldots, c_l'\} = \{d_1, \ldots, d_s\}$ и рассматривая систему $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}(d_1, d_2, \ldots, d_s, \infty) \cap E$. Следствие доказано.

Следствие 2 обосновывает корректность обозначения $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для интеграла $\int\limits_{(<a,b>,\ \mathfrak{A}(c_1,\ldots,c_m,\ \infty)\frown<a,b>)} f(x)\,dx$ — мы получаем право не указывать точек $c_1, \ldots, c_m$, участвующих в построении допустимой системы.

Аналогично может быть установлена корректность обозначения v. p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

В случае, когда $E=[a, +\infty)$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\infty)\frown E$, можно указать одно полезное достаточное условие сходимости несобственного интеграла.

Теорема 6 (1.III). *Пусть функция h непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$ (a — конечное число), функция g непрерывно дифференцируема* на $[a, +\infty)$ и выполняются условия:*

1) *функция* $H: H(t)=\int\limits_a^t h(\tau)\,d\tau$, $t\in[a, +\infty)$ *ограничена*: $|H(t)|\leqslant K<+\infty$ $(t\in[a, +\infty))$,

2) *функция g монотонна на* $[a, +\infty)$,

3) $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h(t)\,g(t)\,dt$ *сходится.*

Доказательство. Сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} h(t)\,g(t)\,dt$ равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{l\to+\infty}\int\limits_a^l h(t)\,g(t)\,dt$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_a^l h(t)\,g(t)\,dt=H(t)\,g(t)\Big|_a^l-\int\limits_a^l H(t)\,g'(t)\,dt.$$

Убедимся, что функция Hg' суммируема на промежутке $[a, +\infty)$. В самом деле, используя то, что функция g' не меняет знака на $[a, +\infty)$, имеем

$$\int\limits_a^{+\infty}|H(t)\,g'(t)|\,dt\leqslant K\int\limits_a^{+\infty}|g'(t)|\,dt=K\lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^n g'(t)\operatorname{sign} g'(t)\,dt=$$

$$=K\lim_{n\to+\infty}\left|\int\limits_a^n g'(t)\,dt\right|=K\,|g(a)|<+\infty.$$

---

* Т. е. производная g' существует и непрерывна на $[a, +\infty)$.

Поэтому $\int\limits_a^l H(t)\,g'(t)\,dt \xrightarrow[l\to+\infty]{} \int\limits_a^{+\infty} H(t)\,g'(t)\,dt$. Кроме того, очевидно, $H(t)\,g(t)\Big|_a^l = H(l)\,g(l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$ и, следовательно, предел $\lim\limits_{l\to+\infty}\int\limits_a^l h(t)\,g(t)\,dt$ существует и конечен.

Теорема доказана.

Следствие. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} h(t)\,dt$ *сходится, а непрерывно дифференцируемая функция* g *монотонна и ограничена, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} h(t)\,g(t)\,dt$.

Доказательство. При $c = \lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$ (ясно, что предел конечен) имеем

$$h(t)\,g(t) = ch(t) + (g(t)-c)\,h(t) = ch(t) + g_1(t)\,h(t).$$

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h(t)g_1(t)dt$ сходится по теореме 6, и теперь утверждение следствия вытекает из теоремы 2.

Замечание. Переходя к пределу при $l\to+\infty$ в равенстве

$$\int\limits_a^l h(t)\,g(t)\,dt = H(t)\,g(t)\Big|_a^l - \int\limits_a^l H(t)\,g'(t)\,dt, \tag{1}$$

получаем формулу интегрирования по частям для несобственных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} h(t)\,g(t)\,dt = H(t)\,g(t)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} H(t)\,g'(t)\,dt, \tag{2}$$

где $H(t)\,g(t)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{l\to+\infty}[H(l)\,g(l) - H(a)\,g(a)]$.

Ясно, что из существования двух из трех пределов: $\lim\limits_{l\to+\infty}\int\limits_a^l h(t)\,g(t)\,dt$, $\lim\limits_{l\to+\infty}\int\limits_a^l H(t)\,g'(t)\,dt$, $\lim\limits_{l\to+\infty} H(l)\,g(l)$ следует, ввиду (1), существование третьего и равенство (2).

1.3. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\,dt = J(\omega)$ $(\omega\in R^1)$.

Функция f: $f(t) = \frac{\sin\omega t}{t}$ $(t\in(0,+\infty))$ не суммируема на промежутке $[0, +\infty)$ при $\omega \neq 0$. В самом деле,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin \omega t|}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = +\infty$$

(см. п. 3.9 гл. II).

Для доказательства сходимости интеграла $J(\omega)$ можно использовать теорему 6, однако непосредственное ее применение осложняется тем, что функция $g: g(t) = \frac{1}{t}$ $(t \in (0, +\infty))$ не удовлетворяет условиям теоремы 6. Привлекая теорему 5, мы видим, что интегралы $J(\omega)$ и $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t}\, dt$ сходятся или нет одновременно. Последний же интеграл, очевидно, сходится по теореме 6.

Заметим, что J есть нечетная функция. Кроме того, при любом $\omega > 0$ в силу теоремы 3 имеем

$$J(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = J(1) = \alpha_0.$$

Таким образом, $J(\omega) = \alpha_0 \operatorname{sign} \omega$ $(\omega \in (-\infty, +\infty))$.

Ниже (§ 3, пример 1) мы вычислим постоянную α_0.

Пример 2. Исследовать интеграл $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}\, dx$.

Данный интеграл с помощью замены переменной $\left(x = \frac{1}{t}\right)$ приводится к интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Таким образом, интеграл $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}\, dt$ сходится (теорема 3), хотя функция $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$ не суммируема на $(0,1)$, так как (см. гл. II, п. 3.9) функция $\frac{\sin t}{t}$ не суммируема на промежутке $[1, +\infty)$.

Пример 3. Исследовать интеграл v. p. $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(-\infty < a < c < b < +\infty)$.

В качестве допустимой системы $\mathfrak{A}$ мы можем (ввиду следствия 2 к теореме 5) рассмотреть простейшую: $\mathfrak{A}_0(c) \cap [a, b]$. По определению,

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\mathfrak{A}} \int_A \frac{dx}{x-c} = \lim_{h \to +0} \left[\int_a^{c-h} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+h}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \lim_{h \to +0} \left[\ln \left| \frac{h}{a-c} \right| + \ln \left| \frac{b-c}{h} \right| \right] = \ln \left| \frac{b-c}{a-c} \right|.$$

Пример 4. Исследовать интеграл v. p. $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx$ $(-\infty < a < c < b < +\infty)$, где функция φ непрерывна на промежутке $[a, b]$ и $|\varphi(x)-\varphi(c)| \leqslant K|x-c|^\alpha$ ($x \in [a, b]$; α, K — конечные положительные числа).

Имеем

$$\frac{\varphi(x)}{x-c} = \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} + \varphi(c)\cdot\frac{1}{x-c} = f_1(x) + f_2(x) \quad (x \in [a, b],\ x \neq c).$$

Функция f_1 суммируема на промежутке $[a, b]$, так как

$$|f_1(x)| \leqslant \frac{|\varphi(x)-\varphi(c)|}{|x-c|} \leqslant \frac{K}{|x-c|^{1-\alpha}} \quad (x \in [a, b],\ x \neq c)$$

(см. лемму из гл. II, п. 3.9), а интеграл v. p. $\int\limits_a^b f_2(x)\,dx$ сходится, как мы видели в примере 3. Следовательно, исходный интеграл также сходится (теорема 2).

Пример 5. В качестве последней иллюстрации рассмотрим вопрос о связи понятия сходимости несобственного интеграла с понятием сходимости числового ряда.

Пусть $E = \mathbf{N}$ — множество натуральных чисел и μ — мера на системе всех подмножеств множества $\mathbf{N}$, состоящая из единичных нагрузок в каждой точке множества $\mathbf{N}$, т. е. (см. гл. I, п. 2.1)

$$\mu A = \begin{cases} n, \text{ если множество } A\ (A \subset \mathbf{N}) \text{ содержит ровно } n \text{ точек,} \\ +\infty, \text{ если множество } A\ (A \subset \mathbf{N}) \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Пусть $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая числовая последовательность, т. е. некоторая функция, заданная на множестве $\mathbf{N}$.

Если $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ — подмножество конечной меры множества $\mathbf{N}$, то $\int\limits_A x\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^k \int\limits_{\{n_i\}} x\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^k x_{n_i}$. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}$, состоящую из множества A_n вида $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что $\mathfrak{A}$ — нормальная система подмножеств множества $\mathbf{N}$, и ясно, что $\mathfrak{A}$ допустима для любой конечной функции, заданной на множестве $\mathbf{N}$.

Существование несобственного интеграла $\int\limits_{(\mathbf{N}, \mathfrak{A})} x\,d\mu$ равносильно существованию предела $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} x\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, т. е. сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Ясно, что $\int\limits_{\mathbf{N}} |x|\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} |x|\,d\mu =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, и, таким образом, абсолютная сходимость числового ряда эквивалентна суммируемости на множестве $\mathbf{N}$ по мере μ функции $|x|$. Неабсолютная же сходимость ряда может быть истолкована лишь в рамках теории несобственных интегралов как сходимость интеграла $\int\limits_{(\mathrm{N},\mathfrak{A})} x d\mu$.

Упражнения. Исследовать сходимость интегралов в упражнениях 1—3.

1. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Ответы: а) функция суммируема, интеграл сходится;
б) функция не суммируема, интеграл расходится.

2. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100} dx$; д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$.

Ответы: а) функция суммируема при $\alpha > 1$; интеграл сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$;
б), в) функция не суммируема, интеграл сходится;
г) функция не суммируема, интеграл сходится;
д) функция суммируема при $p > 1$; интеграл сходится при $p > \frac{1}{2}$, расходится при $p \leqslant \frac{1}{2}$.

3. а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$;

б) v. p $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$.

Ответы: а), в) функция не суммируема, интеграл расходится;
б) функция не суммируема, интеграл сходится.

4. Доказать сходимость и вычислить интегралы.

а) v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$;

б) v. p. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^{2n+1}}$ $(-\infty < a < c < b < +\infty;\ n = 1, 2, \ldots)$.

Ответы: а) 0;

б) $\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{(a-c)^{2n}}-\frac{1}{(b-c)^{2n}}\right]$.

5. а) Интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, функция φ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. Всегда ли сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\sin x\,dx$?

б) Функция f непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится. Обязательно ли сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}[f(x)]^3\,dx$?

Указание. Изучить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$, где

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{при } n=2k-1,\ k=1, 2, \ldots,\\ -\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{\ln n}} & \text{при } n=2k,\ k=1, 2, \ldots\end{cases}$$

Ответы: а) нет; б) нет.

6. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\iint\limits_{(R^2, \mathfrak{A}_0(0, \infty))}\frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$;

б) $\iint\limits_{(R^2, \mathfrak{A})}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, где система $\mathfrak{A}$ состоит из всех прямоугольников вида $[-a, a]\times[-b, b]$.

Указание. В п. б) использовать результат упражнений 2 б) и в).

Ответы: а) функция суммируема при $1<\alpha<2$; интеграл сходится при $0<\alpha<2$;

б) функция не суммируема, интеграл сходится.

7. а) Используя теорему 1, доказать, что из сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует при любом $c\in(a, b)$ сходимость интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$. Вывести отсюда равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

б) Убедиться, что а) уже неверно для интеграла v. p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Каким дополнительным ограничениям следует подчинить c, чтобы снова получить верное утверждение?

8. Пусть $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел, μ — мера, введенная в примере 5, $\mathfrak{A}_1$ — система всех конечных подмножеств множества $\mathbf{N}$. Доказать, что сходимость интеграла $\int\limits_{(E, \mathfrak{A}_1)}x\,d\mu$ равносильна абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$.

9. Доказать, что если функция f определена и дифференцируема на промежутке $[a, b]$ (a и b — конечны) и имеет единственный корень в точке c $(a < c < b)$, причем, $f'(c) \neq 0$ и $|f'(x) - f'(c)| \leqslant K|x-c|^{\alpha}$ $(x \in [a, b]$, $\alpha > 0)$, то интеграл v. p. $\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}$ сходится.

10. Пусть f — измеримая по Лебегу функция, определенная на множестве R^{ν}, $\mu = \mu_{\nu}$ — мера Лебега размерности ν и $\mathfrak{A}$ — система всех ограниченных замкнутых подмножеств пространства R^{ν}. Доказать, что сходимость интеграла $\int\limits_{(R^{\nu}, \mathfrak{A})} f d\mu_{\nu}$ равносильна суммируемости функции f на множестве R^{ν}.

11. Пусть $E = (-\infty, +\infty)$, $E_1 = [0, +\infty)$, μ_1 — мера Лебега, f — функция, определенная на E равенством $f(x) = \chi_{E_1}(x) \sin x$, $\mathfrak{A}$ — система множеств, состоящая из отрезков $[-2\pi n, 2\pi n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $[0, \pi n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \cap E_1$. Доказать, что интеграл $\int\limits_{(E_1, \mathfrak{A}_1)} f d\mu$ не существует, хотя $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f \chi_{E_1} d\mu$ сходится.

§ 2. Элементарная теория интегралов, зависящих от параметра

В этом параграфе мы будем пользоваться обозначениями § 5 гл. II. Мы рассматриваем здесь функции „двух переменных“, определенные на прямом произведении $E_1 \times E$ множеств E_1 $(E_1 \subset R^{\nu_1})$ и E $(E \subset R^{\nu})$. Обычно предполагается, что множества E_1 и E измеримы относительно некоторых σ-алгебр $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}$, на которых заданы меры μ_x и соответственно μ_y, а функции f^x $(x \in E_1)$, определенные на множестве E, суммируемы (если специально не оговорено противное) на множестве E при каждом $x \in E_1$.

Ниже нашей основной задачей будет изучение свойств функции $J\left(J(x) = \int\limits_E f(x, y)\, d\mu_y = \int\limits_E f^x d\mu_y \; (x \in E_1)\right)$, определенной на множестве E_1, или, как говорят, изучение зависимости интеграла сечений $\int\limits_E f(x, y)\, d\mu_y$ от „параметра“ x.

С подобной ситуацией мы уже встречались в теоремах о предельном переходе под знаком интеграла, когда роль параметра играл номер функции. Эти теоремы играют решающую роль в дальнейшем, и, обобщая их, мы получим ряд фактов о перестановочности интегрирования (по одной переменной) с другими фундаментальными операциями анализа — предельным переходом, дифференцированием и т. д. (по другой переменной).

В дальнейшем нам часто придется предполагать, что функция f определена на множестве $E_1 \times E$ и функции f^x суммируемы на множестве E при каждом $x \in E_1$ или при почти всех

$x \in E_1$. Допуская известную вольность речи, мы для краткости будем говорить в таких случаях, что функция f суммируема на множестве E (соответственно суммируема при почти всех $x \in E_1$).

2.1. В этом пункте мы докажем основные теоремы об интегралах, зависящих от параметра.

Теорема 1 (2.III). *(О предельном переходе по параметру.) Пусть функция f определена на множестве $E_1 \times E$ и суммируема на множестве E, функция g определена на множестве E, функция φ суммируема на множестве E, a — точка сгущения множества E_1 и выполнены условия:*

1) ${}^y f(x) = f(x, y) \xrightarrow[x \to a]{} g(y)$ *почти везде на множестве E.**

2) *При каждом $x \in E_1$ $(x \neq a)$*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(y) \tag{1}$$

почти везде на множестве E.

Тогда

1) *функция g суммируема на множестве E и*

2) $J(x) = \int\limits_E f(x, y)\, d\mu_y \xrightarrow[x \to a]{} J = \int\limits_E g\, d\mu_y$, *т. е.*

$$\lim_{x \to a} \int\limits_E f(x, y)\, d\mu_y = \int\limits_E \left(\lim_{x \to a} f(x, y)\right) d\mu_y.$$

Доказательство. Нам достаточно убедиться в том, что для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in E_1,\ x_n \neq a,\ n = 1, 2, \ldots)$, сходящейся к точке a,

$$J(x_n) = \int\limits_E f(x_n, y)\, d\mu_y \xrightarrow[n \to \infty]{} J = \int\limits_E g\, d\mu_y.$$

Но это (вместе с суммируемостью функции g) немедленно следует из теоремы Лебега (гл. II, § 4), все условия которой выполняются, если в качестве f_n взять f^{x_n}.

Теорема доказана.

Замечание 1. Для доказательства теоремы достаточно предположить, что неравенство (1) выполняется не при всех $x \in E_1$, а лишь для точек, принадлежащих произвольной окрестности точки a, т. е. условие 2) можно заменить следующим:

2′) существует окрестность V точки a** (см. д. 1, п. 4 и д. 3, п. 3), такая, что при всех $x \in E_1 \cap \dot{V}$ $(\dot{V} = V \setminus \{a\})$ $|f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$ при почти всех $y \in E$.

Определение 1. В случае, если выполнено условие 2′) и функция φ суммируема на множестве E, мы будем говорить,

* Если $E_1 \subset R^1$, то мы не исключаем случая, когда $a = \pm\infty$.

** Как обычно, если $E_1 \subset R^1$ и $a = +\infty$ (или $a = -\infty$), то под окрестностью точки $(+\infty)$ или $(-\infty)$ мы понимаем произвольное множество, содержащее некоторую полупрямую $(b, +\infty)$ $(-\infty, b)$.

что функция f равномерно суммируема на множестве E в окрестности точки a.

Замечание 2. Условие 2) можно заменить также следующим:

2″) мера $\mu_y E$ конечна и существуют числа $p>1$ и $K<+\infty$, такие, что

$$\int_E |f(x, y)|^p d\mu_y \leqslant K \quad \text{при всех} \quad x \in E_1, \ x \neq a$$

(или хотя бы для всех $x \in E_1 \cap V$, $x \neq a$, где V — произвольная окрестность точки a).

При замене условия 2) условием 2″) мы в доказательстве должны лишь вместо теоремы Лебега сослаться на теорему 5 (4.II).

Замечание 3. Если $\mu_y E < +\infty$, то возможность предельного перехода под знаком интеграла можно вывести из теоремы 4 (4.II). В самом деле, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — какая-нибудь последовательность точек множества E_1, удовлетворяющая условиям: $x_n \neq a$ при всех $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Функции f^{x_n} $(n=1, 2, \ldots)$ имеют на множестве E равностепенно абсолютно непрерывные интегралы (см. определение 1, гл. II, п. 4.5), как это видно из условий 2), 2′), 2″). Поэтому по теореме 4 (4.II)

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^{x_n} d\mu_y = \int_E g\, d\mu_y,$$

что и требовалось доказать.

Следующая теорема получается очевидной переформулировкой теоремы 1.

Теорема 2 (2.III). *(О непрерывности по параметру.) Пусть функция f определена на множестве $E_1 \times E$, суммируема на множестве E и функции ${}^y f$ непрерывны в точке $x_0 \in E_1$ при почти всех $y \in E$. Пусть, кроме того, функция f равномерно суммируема в окрестности точки x_0. Тогда функция $J: J(x) = \int_E f(x, y)\, d\mu_y$ $(x \in E_1)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство теоремы 2 получается из сопоставления теоремы 1 и замечания 1 к ней.

Замечание 1. Равномерная суммируемость функции f в окрестности каждой точки множества E_1 будет иметь место, если $\mu_y E < +\infty$ и функция f ограничена на множестве $E_1 \times E$ (в качестве функции мажорирующей f можно взять в этом случае просто функцию, принимающую одно значение $l = \sup\limits_{E_1 \times E} |f(x, y)| < +\infty$).

Замечание 2. Теорема 2 остается, конечно, справедливой, если условие равномерной суммируемости в окрестности точки x_0 заменить условием 2″).

Замечание 3. Если функции ${}^{y}f$ непрерывны в каждой точке $x \in E_1$ (при почти всех $y \in E$) и функция f равномерно суммируема в окрестности каждой точки $x \in E_1$ (что, в частности, будет выполнено, если $|f|$ мажорируется некоторой функцией φ, суммируемой на множестве E, т. е. для любого $x \in E_1$ $|f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$ почти везде на множестве E), то функция J: $J(x) = \int\limits_E f(x, y)\, d\mu_y$ $(x \in E_1)$ непрерывна на всем множестве E_1.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что σ-алгебра $\mathfrak{B}_E$, на которой задана мера μ_y, обладает следующим свойством: все функции, определенные и непрерывные на множестве E, измеримы. Для таких мер замечание 3 будет справедливо, если, в частности, $E_1 \times E = [a, b] \times [c, d]$, функция f непрерывна на множестве $[a, b] \times [c, d]$ и $\mu E = \mu([c, d]) < +\infty$.

Примеры. Доказать непрерывность функций:

1) H: $H(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy \quad (x \in (-\infty, +\infty))$;

2) J: $J(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin y dy \quad (x \in (0, +\infty))$;

3) K: $K(x) = \int\limits_0^1 \frac{\sin xy}{\sqrt{|x-y|}} dy \quad (x \in [0, 1])$.

Решение. 1) Так как $|f(x, y)| = \left|\frac{\cos xy}{1+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+y^2}$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in [0, +\infty)$ и функция $\varphi \left(\varphi(y) = \frac{1}{1+y^2} \; (y \in [0, +\infty))\right)$ суммируема на промежутке $[0, +\infty)$, то непрерывность функции H следует из замечания 3 к теореме 2.

2) Функция $f(f(x, y) = e^{-xy} \sin y \;\; ((x, y) \in R^2))$ равномерно суммируема в каждой окрестности точки $x_0 > 0$, что вытекает из верного для всех $x \geqslant \frac{x_0}{2}$ неравенства: $|e^{-xy} \sin y| \leqslant e^{-\frac{x_0}{2} y}$ $(y \in [0, +\infty))$. Остается применить теорему 2.

3) Здесь для доказательства непрерывности функции K удобно воспользоваться условием $2''$ (см. замечание 2 к теореме 2). В самом деле, при $p = \frac{3}{2}$ получаем

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{|x-y|}} \right|^{3/2} dy \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dy}{|x-y|^{3/4}} = \int\limits_{x-1}^{x} \frac{dt}{|t|^{3/4}} \leqslant \int\limits_{-1}^{+1} \frac{dt}{|t|^{3/4}} < +\infty.$$

Читатель может убедиться в том, что равномерной суммируемости подынтегральной функции в окрестности точки x_0 здесь нет ни для какой точки $x_0 \in [0, 1]$.

Столь же непосредственно, как и непрерывность, из теоремы 1 может быть получена и дифференцируемость интеграла по параметру.

Теорема 3 (2.III). *(О дифференцировании по параметру.) Пусть* $E_1 = \langle a, b\rangle$, *функция* f *определена на множестве* $\langle a, b\rangle \times E$ $(E \subset R^\nu)$ *и суммируема на множестве* E. *Пусть, кроме того,*

1) *при почти всех* $y \in E$ *и каждом* $x \in \langle a, b\rangle$ *существует конечная частная производная* $D^{(1)}f(x, y)$;

2) *функция* $D^{(1)}f$ *равномерно суммируема на множестве* E *в окрестности точки* $x_0 \in E_1$.

Тогда функция $J\left(J(x) = \int\limits_E f(x, y)\,d\mu_y \;\; (x \in \langle a, b\rangle)\right)$ *имеет в точке* $x_0 \in E_1$ *конечную производную, которая может быть вычислена „дифференцированием по параметру под знаком интеграла“, т. е. так:*

$$J'(x_0) = \int\limits_E D^{(1)}f(x_0, y)\,d\mu_y. \tag{2}$$

Последнее равенство известно под названием „правила Лейбница“.

Доказательство. Пусть $h \neq 0$, $x_0 + h \in E_1$. Так как

$$\frac{J(x_0+h) - J(x_0)}{h} = \int\limits_E \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h}\,d\mu_y = \int\limits_E F(h, y)\,d\mu_y,$$

то существование производной $J'(x_0)$ и требуемое равенство (2) немедленно следуют из возможности предельного перехода под знаком интеграла при $h \to 0$. Законность этого предельного перехода вытекает из равномерной суммируемости подынтегральной функции

$$F\left(F(h, y) = \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h} \quad (y \in E,\ h \neq 0,\ x_0 + h \in E_1)\right)$$

в окрестности точки $h = 0$. Убедимся, что равномерная суммируемость функции F в окрестности точки $h = 0$ имеет место. В самом деле, при почти каждом $y \in E$ мы получаем по формуле Лагранжа равенство (при некотором $\theta \in (0, 1)$)

$$F(h, y) = D^{(1)}f(x_0 + \theta h, y).$$

С другой стороны, по условию 2) существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 и функция φ, суммируемая на множестве E, такие, что при всяком $x \in \dot V(x_0) \cap E_1$* почти везде на E выполняется

* Здесь обозначено $\dot V(x_0) = V(x_0) \setminus \{x_0\}$.

неравенство $|D^{(1)}f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$. Итак, при каждом h, удовлетворяющем условию $x_0 + h \in \dot{V}(x_0) \cap E_1$, для почти всех $y \in E$ справедливо неравенство $|F(h, y)| \leqslant \varphi(y)$, т. е. функция F равномерно суммируема в окрестности точки $h = 0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. В частности, условие 2) теоремы всегда выполнено, если $\mu_y E < +\infty$ и функция $D^{(1)}f$ ограничена.

Замечание 2. Мы предоставляем читателю сформулировать теорему 3 для случая, когда множество E_1 есть открытое подмножество пространства R^{ν}. Если $E_1 \subset R^2$, то при предположениях теоремы 3 из аналитичности функций ${}^y f\ (y \in E)$ следует в случае равномерной суммируемости функции f в окрестности каждой точки множества E_1 аналитичность интеграла сечений.

Примеры. Установим дифференцируемость функций:

$$4)\ H\colon H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy}{1 + y^4}\, dy \quad (x \in (-\infty, +\infty));$$

$$5)\ J\colon J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y}\, dy \quad (x \in (0, +\infty)).$$

Решение.

4) Так как $|D^{(1)}f(x, y)| = \left|\frac{y \cos xy}{1 + y^4}\right| \leqslant \frac{|y|}{1 + y^4}$ для всех $(x, y) \in R^2$ и функция $\varphi\left(\varphi(y) = \frac{|y|}{1 + y^4}(y \in R^1)\right)$ суммируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$, то функция $D^{(1)}f$ равномерно суммируема в окрестности каждой точки $x \in R^1$, откуда и вытекает возможность применения теоремы 3.

5) Функция J имеет производную J' в каждой точке $x > 0$, так как функция $D^{(1)}f\ (D^{(1)}f(x, y) = -e^{-xy} \sin xy)$ равномерно суммируема в окрестности каждой точки $x > 0$, что уже было установлено в примере 2.

6) Пусть E — некоторое ограниченное замкнутое множество на комплексной плоскости, $E_1 = E'$ — дополнение множества E, μ_ζ — мера на σ-алгебре $\mathfrak{M}_E$, $\mu_\zeta E < +\infty$ и f — непрерывная функция, определенная на множестве E.* Тогда функция

$$J : J(z) = \int_E \frac{f(\zeta)\, d\mu_\zeta}{z - \zeta} \quad (z \in E')$$

регулярна в E' и $J'(z) = -\int_E \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^2}\, d\mu_\zeta$.

---

* σ-алгебра $\mathfrak{M}_E$ такова, что функция f измерима.

Доказательство. Равномерная суммируемость функции F: $F(z, \zeta) = -\frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}$ $((z, \zeta) \in E' \times E)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in E'$ следует из непрерывности, а значит, и ограниченности этой функции на множестве $\overline{D^2(z_0, r)} \times E$, где $\overline{D^2(z_0, r)}$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке z_0, пересечение которого с множеством E пусто.

После изучения вопроса о дифференцировании естественно встает задача об „интегрировании по параметру". Она, однако, уже разрешена теоремой Фубини (теорема 3(5.II)), и мы ограничимся напоминанием этой теоремы (точнее, ее частного случая, несколько изменив ее форму).

Теорема 4(2.III). *(Об интегрировании по параметру.) Пусть функция f имеет интеграл на множестве $E_1 \times E$ $(E_1 \subset R^{\nu_1}, E \subset R^{\nu})$* относительно меры $\mu_{\nu+\nu_1}$.*

Тогда:

1) *функции f^x имеют интегралы на множестве E относительно меры μ_ν при почти всех $x \in E_1$;*

2) *функции ${}^y f$ имеют интегралы на множестве E_1 относительно меры μ_{ν_1} при почти всех $y \in E$;*

3) *функции $J: J(x) = \int\limits_E f(x, y)\, d\mu_\nu$ $(x \in E_1)$ и $K: K(y) = \int\limits_{E_1} f(x, y)\, d\mu_{\nu_1}$ $(y \in E)$ определены почти везде и имеют интегралы на множествах E_1 и E относительно мер μ_{ν_1} и μ_ν соответственно;***

4) *повторные интегралы $\int\limits_{E_1} J d\mu_{\nu_1}$ и $\int\limits_E K d\mu_\nu$ равны, или, подробнее,*

$$\int\limits_{E_1}\left(\int\limits_E f(x, y)\, d\mu_\nu\right) d\mu_{\nu_1} = \int\limits_E\left(\int\limits_{E_1} f(x, y)\, d\mu_{\nu_1}\right) d\mu_\nu.$$

Напомним еще, что оба „повторных" интеграла равны „двойному" интегралу $\int\limits_{E_1 \times E} f d\mu_{\nu_1+\nu}$, поэтому если функция f суммируема на множестве $E_1 \times E$, то функции J и K суть суммируемые функции на множествах E_1 и E соответственно (определенные, быть может, не всюду, но наверняка почти везде, как вытекает из утверждения 3) теоремы). Теоремой 4

---

* Множества E и E_1 измеримы по Лебегу; μ_ν — мера Лебега размерности ν.

** Мы не исключаем и бесконечных значений у функций J и K даже на множестве положительной меры. Последнее возможно, так как мы предположили функцию f лишь имеющей интеграл, но, вообще говоря, не суммируемой на множестве $E_1 \times E$.

особенно удобно пользоваться в том случае, когда функция f измерима на множестве $E_1 \times E$ и неотрицательна, благодаря чему существование интеграла у функции f не требует проверки.

2.2. В этом пункте рассматриваются так называемые истокообразно представимые функции и интегралы типа потенциала.

Определение 1. Пусть функция K задана на множестве $E_1 \times E$, функция ω задана на множестве E, а функция J задана на множестве E_1 следующим образом:

$$J(x) = \int\limits_E K(x, y)\,\omega(y)\,d\mu_\nu.$$

Тогда функцию K называют *ядром* и говорят, что функция J *истокообразно представима* с помощью ядра K.

С помощью общих теорем мы сразу можем получить ряд свойств истокообразно представимых функций. Эти свойства, разумеется, зависят от свойств ядра.

Сформулируем лишь одну из многочисленных возможных в этой ситуации теорем.

Теорема 2′ (2.III). *Если функции K^x измеримы на множестве E при каждом $x \in E_1$, ядро K ограничено на множестве $E_1 \times E$ и функции ${}^yK$ непрерывны при почти всех $y \in E$, а функция ω суммируема на множестве E, то функция J $\left(J(x) = \int\limits_E K(x, y)\,\omega(y)\,d\mu_y \ (x \in E_1)\right)$ непрерывна на множестве E_1.*

Другим важным частным случаем интегралов, зависящих от параметра, являются так называемые интегралы типа потенциала, т. е. интегралы вида

$$J(x) = \int\limits_E \frac{B(x, y)}{\|x - y\|_\nu^\alpha}\,d\mu_y \ (x \in E_1), \text{ где } E \subset R^\nu,\ E_1 \subset R^\nu.$$

Название „интеграл типа потенциала“ происходит от аналогии с интегралом $\int\limits_E \frac{1}{\|x - y\|_3}\,d\mu_y \ (E \subset R^3)$, который дает значение в точке x потенциала поля тяготения, создаваемого массой, распределенной по множеству E.

Ниже мы будем рассматривать только лебегову меру μ_ν на σ-алгебре $\mathfrak{M}_E^\nu$ и считать, кроме того, что множество E ограничено. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5 (2.III). *Если функция B непрерывна и ограничена на множестве $E_1 \times E$ и $\alpha < \nu$, то функция*

$$J : J(x) = \int\limits_E \frac{B(x, y)}{\|x - y\|_\nu^\alpha}\,d\mu_\nu \ (x \in E_1)$$

непрерывна на множестве E_1.

Теорема 5 может быть немедленно получена из теоремы 2 и замечания к ней. В самом деле, пусть $E \subset P_h(0)$ *, $|B(x, y)| \leqslant L$ $((x, y) \in E_1 \times E)$ и число $p > 1$ таково, что $\beta = \alpha p$ все еще строго меньше ν. Так как непрерывность функции есть локальное свойство, то мы, не умаляя общности, можем считать, что множество E_1 ограничено. Пусть $E_1 \subset P_{h_1}(0)$. Проверим выполнение условия из замечания 2 к теореме 2: **

$$\int_E \left|\frac{B(x, y)}{\|x-y\|_\nu^\alpha}\right|^p d\mu_\nu(y) \leqslant \int_E \frac{L^p}{\|x-y\|_\nu^\beta} d\mu_\nu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{P_h(0)} \frac{L^p}{\|x-y\|_\nu^\beta} d\mu_\nu(y) = \int_{P_h(x)} \frac{L^p}{\|y\|_\nu^\beta} d\mu_\nu(y) \leqslant \int_{P_{h+h_1}(0)} \frac{L^p}{\|y\|_\nu^\beta} d\mu_\nu(y) =$$

$$= A < +\infty \quad (x \in E_1).$$

Доказательство закончено.

Мы предоставляем читателю убедиться в том, что условие ограниченности множества E может быть заменено условием $\mu_\nu E < +\infty$.

Если $\alpha < \nu - 1$, а функция B имеет ограниченные и непрерывные частные производные, то, как читатель легко убедится, функция J также имеет непрерывные частные производные.

2.3. В этом пункте мы вернемся к изучению функции Γ (см. гл. II, п. 3.9). Установим дифференцируемость функции Γ $\left(\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \ (x > 0)\right)$ при всех $x > 0$. Так как функция f $(f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ $(t > 0, \ x > 0))$, очевидно, дифференцируема при $x > 0$, $t > 0$, то требуемый результат следует из равномерной суммируемости функции $D^{(1)} f$: $\left(D^{(1)} f(x, t) = t^{x-1} (\ln t) e^{-t} (x > 0, \ t > 0)\right)$ на множестве $E = (0, +\infty)$ в окрестности каждой точки $x > 0$. Убедимся, что это в самом деле так. Для любого $x \in \left(\frac{x_0}{2}, \frac{3}{2} x_0\right)$ $(x_0 > 0)$ имеем

$$|D^{(1)} f(x, t)| \leqslant \max \left\{t^{\frac{x_0}{2}-1}, t^{\frac{3}{2}x_0-1}\right\} |\ln t| e^{-t} \leqslant$$

$$\leqslant \left(t^{\frac{x_0}{2}-1} + t^{\frac{3}{2}x_0-1}\right) |\ln t| e^{-t} = \varphi(t) \quad (t > 0).$$

Так как функция φ суммируема на промежутке $(0, +\infty)$, то требуемая равномерная суммируемость функции $D^{(1)} f$ в окрестности точки x_0 доказана, и мы получаем равенство

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t) e^{-t} dt \quad (x > 0).$$

* $P_h(u) = [u_1 - h, u_1 + h] \times \ldots \times [u_\nu - h, u_\nu + h]$ — замкнутый ν-мерный квадрат с центром в точке $u = (u_1, \ldots, u_\nu)$ и со стороной длины $2h$.

** См. теорему 4 (6.II) и лемму из п. 3.9.

Аналогично доказывается, что функция Γ имеет производные всех порядков, которые также могут быть найдены дифференцированием под знаком интеграла.

Упражнения. 1. Исследовать на непрерывность в указанных промежутках функции J и K:

$$\text{а) } J(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y}}{|\sin y|^x}\,dy \quad (x\in(0,\ 1));$$

$$\text{б) } K(x)=\int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\,dy \quad (x\in(-\infty,\ +\infty)).$$

Ответы: а) функция непрерывна;

б) функция непрерывна при $x\neq 0$, разрывна при $x=0$.

2. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1\frac{\ln(1-x^2y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \quad (|x|\leqslant 1);$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}-c^{-\beta t}}{t}\cos mt\,dt \quad (\alpha>,\ \beta>0);$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\frac{\sin y}{y}\,dy \quad (x>0).$$

3. Доказать, что если функция f суммируема на промежутке $(-\infty,\ +\infty)$, то функция u

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}\,dt \quad ((x,\ t)\in(-\infty,\ +\infty)\times(0,\ +\infty))$$

удовлетворяет при $t>0$ и любом x уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)=$ $=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)$.

4. С помощью равенства

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \quad (0\leqslant m<n)$$

доказать, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi a} \quad (0<a<1),$$

и вывести отсюда (используя результат примера 3 из гл. II, п. 6.6) формулу $\Gamma(a)\ \Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}$ $(0<a<1)$.

§ 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

При исследовании интегралов, зависящих от параметра, мы часто сталкиваемся с таким положением, когда задачи, где первоначально фигурировали лишь суммируемые функции, приводят (например, в результате предельного перехода или дифференцирования по параметру) к несобственным интегралам. Рассмотрим, например, интеграл

$$J(x)=\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x \quad (x>0)^*.$$

Если бы мы могли перейти здесь при $x\to+0$ к пределу под знаком интеграла, то немедленно получили бы

$$\alpha_0=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy=\lim_{x\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}.$$

Этот предельный переход, однако, нам еще предстоит обосновать, и это обоснование заведомо не может быть проведено, если мы ограничимся лишь интегралами от суммируемых функций; в частности, очевидно, безнадежно в нашем случае пытаться использовать один из вариантов теоремы 1 (2.III), так как у нас предельная функция g $\left(g(y)=\frac{\sin y}{y}\quad (y>0)\right)$ не суммируема на $(0, +\infty)$ (см. гл. II, п. 3.9, пример 3).

3.1. Как мы уже отмечали раньше, в основе теорем о предельном переходе по параметру (в случае „собственных" интегралов) лежит условие: функции f^x $(x\in E_1)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на множестве E. Сейчас мы определим аналогичное свойство, имеющее, однако, смысл и в случае несобственных интегралов.

Определение 1. Пусть функция f определена на множестве $E_1\times E$ $(E_1\times E\subset R^{\nu_1}\times R^{\nu})$, $\mathfrak{A}$ — некоторая нормальная система подмножеств множества E и интеграл $J(x)=\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} f(x,y)\,d\mu_y$ сходится при каждом $x\in E_1$.** Будем говорить, что интеграл $J(x)=\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} f(x,y)\,d\mu_y$ сходится равномерно на множестве E_1,

---

* В самом деле, с помощью теорем § 2 мы сразу получаем $J(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ и $J'(x)=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin y\,dy$ $(x>0)$. Так как $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin y\,dy=\frac{1}{1+x^2}$, то $J(x)=c-\operatorname{arctg} x$, и ввиду соотношения $J(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ мы имеем $c=\frac{\pi}{2}$.

** Это требование заменяет теперь условие суммируемости функций f^x на множестве E при каждом $x\in E_1$.

если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество (одно и то же для всех $x \in E_1$!) $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, такое, что для любого множества A, удовлетворяющего условиям $A \in \mathfrak{A}$, $A \supset A_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\left| J(x) - \int_A f(x, y)\, d\mu_y \right| < \varepsilon \text{ при каждом } x \in E_1. \qquad (1)$$

Замечание 1. Если $E' = E \setminus A$ ($A \in \mathfrak{A}$) и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap E'$, то интеграл $\int_{(E', \mathfrak{A}')} f(x, y)\, d\mu_y$ сходится (см. теорему 5(1.III)) и условие (1) может быть представлено в виде

$$\left| \int_{(E', \mathfrak{A}')} f(x, y)\, d\mu_y \right| < \varepsilon \text{ при каждом } x \in E_1. \qquad (1')$$

Замечание 2. Когда $E = [a, +\infty)$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\infty) \cap E$, условие (1′) принимает следующую форму: для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число l_ε, такое, что при каждом $l > l_\varepsilon$

$$\left| \int_{(l, +\infty)} f(x, y)\, d\mu_y \right| < \varepsilon \text{ для всех } x \in E_1.$$

Замечание 3. Если существует суммируемая на множестве E функция φ, такая, что для каждого $x \in E_1$ неравенство $|f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$ выполняется для почти всех $y \in E$, то, очевидно, интеграл $J(x)$ (превращающийся в собственный) сходится равномерно на множестве E_1. В самом деле,

$$\left| J(x) - \int_A f(x, y)\, d\mu_y \right| = \left| \int_{E \setminus A} f(x, y)\, d\mu_y \right| \leqslant \int_{E \setminus A} \varphi(y)\, d\mu_y.$$

Так как функция φ суммируема на множестве E, то по любому положительному числу $\varepsilon > 0$ найдется множество $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, такое, что $\int_{E \setminus A_\varepsilon} \varphi(y)\, d\mu_y < \varepsilon$. Если $A \in \mathfrak{A}$, $A \supset A_\varepsilon$, то и подавно $\int_{E \setminus A} \varphi(y)\, d\mu_y < \varepsilon$ и, значит, выполняется неравенство (1).

Пусть теперь $\mu_y E < +\infty$ и функции f^x ($x \in E_1$) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на множестве E. Тогда, непосредственно сравнивая определения, мы видим, что (собственный) интеграл $\int_E f(x, y)\, d\mu_y = \int_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\, d\mu_y$ сходится равномерно, какова бы ни была нормальная система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества E.

Замечание 4. Если $E = \mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел, нормальная система $\mathfrak{A}$ состоит из множеств $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и мера μ_y образована единичными нагрузками во всех точках (см. пример 5, § 1), то $f(x, y) = f(x, n) = u_n(x)$, а функция J $\left(J(x)=\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\quad (x\in E_1)\right)$ есть сумма ряда, и определение 1 в этом случае превращается в определение равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E_1.

Теорема 1 (3.III). *Равномерная сходимость интеграла* $J(x)=\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y$ *на множестве* E_1 *равносильна следующему условию:*

для каждого числа $\varepsilon>0$ *существует множество* $A_\varepsilon\in\mathfrak{A}$, *такое, что для любых множеств* $A,\ \tilde{A}\in\mathfrak{A}$, *содержащих множество* A_ε, *для всех* $x\in E_1$ *выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{A} f(x,\, y)\,d\mu_y-\int\limits_{\tilde{A}} f(x,\, y)\,d\mu_y\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость сформулированного условия немедленно следует из определения равномерной сходимости несобственного интеграла и неравенства

$$\left|\int\limits_{A} f(x,\, y)\,d\mu_y-\int\limits_{\tilde{A}} f(x,\, y)\,d\mu_y\right|\leqslant\left|\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{A} f(x,\, y)\,d\mu_y\right|+\left|\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y-\int\limits_{\tilde{A}} f(x,\, y)\,d\mu_y\right|.$$

Докажем достаточность. Из теоремы 1 (1.III) вытекает, что интеграл $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y$ сходится при каждом $x\in E_1$. Фиксируя произвольное множество A ($A\in\mathfrak{A},\ A\supset A_\varepsilon$) и переходя в неравенстве $\left|\int\limits_{A} f(x,\, y)\,d\mu_y-\int\limits_{\tilde{A}} f(x,\, y)\,d\mu_y\right|<\varepsilon$ к пределу по системе $\mathfrak{A}$, получаем

$$\left|\int\limits_{A} f(x,\, y)\,d\mu_y-\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y\right|\leqslant\varepsilon \text{ при каждом } x\in E_1.$$

Теорема доказана.

Нам будет удобно в дальнейшем следующее определение.

Определение 2. Пусть выполнены требования определения 1, V — некоторая окрестность точки x_0 и $\dot{V}=V\setminus\{x_0\}$. Если $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y$ равномерно сходится на множестве $\dot{V}\cap E_1$, то мы будем говорить, что интеграл $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x,\, y)\,d\mu_y$

равномерно сходится в окрестности точки x_0. (При этом, когда множество E_1 содержится в пространстве R^1, мы не исключаем и случая $x_0 = \pm\infty$.)

Замечание. Ясно, что равномерная сходимость интеграла в окрестности точки x_0 немедленно следует из равномерной суммируемости функции f в окрестности этой точки (ср. с замечанием 3 к определению 1).

В случае, когда $E = [a, +\infty)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\infty) \cap [a, +\infty)$, полезным оказывается следующий критерий равномерной сходимости несобственного интеграла (ср. с теоремой 6 (1.III)).

Теорема 2 (3.III). *Пусть $E_1 \subset R^\nu$, $E = [a, +\infty)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\infty) \cap [a, +\infty)$, $f(x, y) = h(x, y)_0 \cdot g(x, y)$ $((x, y) \in E_1 \times E)$, причем функция h^x непрерывна при каждом $x \in E_1$ и функция g^x имеет непрерывную производную $(g^x)'(y) = D^2 g(x, y)$.*

Пусть, кроме того,

1) *функция H $\left(H(x, t) = \int\limits_a^t h(x, y)\,dy \quad ((x, t) \in E_1 \times E)\right)$ ограничена на множестве $E_1 \times E: |H(x, t)| \leqslant K < +\infty$ $((x, t) \in E_1 \times E)$;*

2) *при каждом $x \in E_1$ функция g^x монотонна;*

3) *$g^x(y) = g(x, y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$ равномерно на множестве E_1, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует число y_ε, такое, что $|g(x, y)| < \varepsilon$ при всех $y > y_\varepsilon$, каков бы ни был $x \in E_1$.*

Тогда несобственный интеграл $J(x) = \int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\, g(x, y)\, dy$ равномерно сходится на множестве E_1.

Доказательство этой теоремы, аналогичное доказательству теоремы 6 § 1, мы предоставляем читателю.

Равномерную сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\, g(x, y)\, dy$ можно установить и при несколько измененных условиях (ср. со следствием из теоремы 6 § 1 !).

Теорема 2′ (3.III). *Пусть вместо условий 1—3 теоремы 2 функции h и g удовлетворяют условиям:*

1′) *интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\, dy$ равномерно сходится на множестве E_1;*

2′) *при каждом $x \in E_1$ функция g^x монотонна и имеет непрерывную производную: $(g^x)'(y) = D^{(2)} g(x, y)$;*

3′) *функция g ограничена на множестве $E_1 \times E$:*

$$|g(x, y)| \leqslant L < +\infty \quad ((x, y) \in E_1 \times E).$$

Тогда интеграл $J(x)=\int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\,g(x, y)\,dy$ *равномерно сходится на множестве* E_1.

Доказательство. Несобственный интеграл $J(x)=$ $=\int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\,g(x, y)\,dy$ сходится при каждом $x\in E_1$ по следствию к теореме 6 § 1. Пусть $H(x, t)=\int\limits_a^t h(x, y)\,dy-$ $-\int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\,dy=-\int\limits_t^{+\infty} h(x, y)\,dy$ $((x, t)\in E_1\times E)$. По условию, для всякого $\varepsilon>0$ найдется число t_ε, такое, что $|H(x, t)|<\varepsilon$ при любом $t>t_\varepsilon$ и любом $x\in E_1$ (см. замечание 2 к определению 1).

По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_t^{+\infty} h(x, y)\,g(x, y)\,dy=H(x, y)\,g(x, y)\Big|_{y=t}^{y=+\infty}-$$
$$-\int\limits_t^{+\infty} H(x, y)\,D^2g(x, y)\,dy.$$

Очевидно,

$$\left|H(x, y)\,g(x, y)\Big|_{y=t}^{y=+\infty}\right|=\lim_{l\to+\infty}|H(x, l)\,g(x, l)-$$
$$-H(x, t)\,g(x, t)|=|H(x, t)\,g(x, t)|\leqslant L\varepsilon$$

при $t>t_\varepsilon$ и любом $x\in E_1$. Кроме того, так как функция D^2g в силу монотонности функций g^x сохраняет знак при фиксированном $x\in E_1$, то

$$\left|\int\limits_t^{+\infty} H(x, y)\,D^2g(x, y)\,dy\right|\leqslant\int\limits_t^{+\infty}|H(x, y)|\,|D^2g(x, y)|\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\int\limits_t^{+\infty}|D^2g(x, y)|\,dy=\varepsilon\left|\int\limits_t^{+\infty} D^2g(x, y)\,dy\right|=$$
$$=\varepsilon\left|g(x, y)\Big|_{y=t}^{y=+\infty}\right|=\varepsilon\lim_{l\to+\infty}|g(x, l)-g(x, t)|\leqslant 2L\varepsilon$$

при любом $t>t_\varepsilon$ и любом $x\in E_1$. Окончательно, при любом $t>t_\varepsilon$ и любом $x\in E_1$ имеем

$$\left|\int\limits_t^{+\infty} h(x, y)\,g(x, y)\,dy\right|\leqslant 3L\varepsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость интеграла $J(x)$ на множестве E_1.

Следствие. *Пусть функция h такова, что $h(x, y) = h_1(y)$ $((x, y) \in E_1 \times E)$, где h_1 — функция, заданная на множестве E, и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h(x, y)\,dy = \int\limits_a^{+\infty} h_1(y)\,dy$ сходится, а функция g удовлетворяет условиям теоремы. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h_1(y)\,dy$, очевидно, сходится равномерно на множестве E_1, и по теореме 2′ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h_1(y)\,g(x, y)\,dy$ также равномерно сходится на множестве E_1.*

3.2. Везде ниже мы будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз специально, что несобственный интеграл $J(x) = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ сходится при каждом $x \in E_1$ (функция f определена на множестве $E_1 \times E$).

Мы будем также для простоты формулировок считать, что система $\mathfrak{A}$ состоит из замкнутых ограниченных множеств (см. д. 3, п. 4 и 5) конечной меры. Наконец, мы предполагаем еще, что все непрерывные функции на множестве E измеримы относительно σ-кольца $\mathfrak{M}_E$, на котором задана мера μ_y.

Теорема 3 (3.III). *(О предельном переходе по параметру.) Пусть* 1) $f(x, y) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(y)$ *при почти всех* $y \in E$;

2) *при всяком множестве A $(A \in \mathfrak{A})$ функция g суммируема на множестве A и* $\int\limits_A f(x, y)\,d\mu_y \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \int\limits_A g(y)\,d\mu_y$;

3) *интеграл* $J(x) = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ *равномерно сходится в окрестности точки* $x_0 \in E_1$.

Тогда

1) *несобственный интеграл* $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} g(y)\,d\mu_y$ *сходится и*

2) $\lim\limits_{x \to x_0} J(x) = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} g(y)\,d\mu_y$.

Доказательство. Установим сначала сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} g(y)\,d\mu_y$. Если интеграл $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ равномерно сходится на множестве $E_1 \cap \dot{V}(x_0)$, где $V(x_0)$ — некоторая окрестность точки x_0, то по теореме 1 (3.III) при любом $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, такое, что при $A \supset A_\varepsilon$, $\tilde{A} \supset A_\varepsilon$ $(A, \tilde{A} \in \mathfrak{A})$ и при любом $x \in E_1 \cap \dot{V}(x_0)$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_A f(x, y)\,d\mu_y - \int\limits_{\tilde{A}} f(x, y)\,d\mu_y \right| < \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to x_0$, в силу условия 2) теоремы получаем

$$\left| \int_A g(y)\, d\mu_y - \int_{\widetilde{A}} g(y)\, d\mu_y \right| \leqslant \varepsilon,$$

из чего, согласно теореме 1 (1.III), и следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g(y)\, d\mu_y$.

Переходя к доказательству утверждения 2) теоремы, заметим, что

$$\left| J(x) - \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g(y)\, d\mu_y \right| \leqslant \left| \int_A f(x, y)\, d\mu_y - \int_A g(y)\, d\mu_y \right| +$$
$$+ \left| \int\limits_{(E',\,\mathfrak{A}')} f(x, y)\, d\mu_y \right| + \left| \int\limits_{(E',\,\mathfrak{A}')} g(y)\, d\mu_y \right|,$$

где $E' = E \setminus A$ и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap E'$. При произвольном числе $\varepsilon > 0$ можно выбрать множество A $(A \in \mathfrak{A})$ так, чтобы при всех $x \in E_1 \cap \dot{V}(x_0)$ выполнялось неравенство $\left| \int\limits_{(E',\,\mathfrak{A}')} f(x, y)\, d\mu_y \right| < \varepsilon$, а расширяя в случае надобности множество A, можно добиться также и выполнения неравенства $\left| \int\limits_{(E',\,\mathfrak{A}')} g(y)\, d\mu_y \right| < \varepsilon$.

Фиксируя такое множество A, мы видим, что (ввиду условия 2)) найдется окрестность $W(x_0)$ точки x_0 ($W(x_0) \subset V(x_0)$), такая, что при всех $x \in E_1 \cap \dot{W}(x_0)$ выполняется неравенство

$$\left| \int_A f(x, y) d\mu_y - \int_A g(y)\, d\mu_y \right| < \varepsilon.$$

Окончательно получаем $\left| J(x) - \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} g(y)\, d\mu_y \right| < 3\varepsilon$ при всех $x \in E_1 \cap \dot{W}(x_0)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 мы с помощью очевидных изменений (ср. с теоремами 1 и 2 из § 2) можем получить теорему о непрерывности интеграла по параметру. Мы ограничимся лишь рассмотрением одного частного случая.

Теорема 4 (3.III). *(О непрерывности несобственного интеграла по параметру.) Пусть функция f непрерывна на множестве $E_1 \times E$ и интеграл $J(x) = \int\limits_{(E,\,\mathfrak{A})} f(x, y)\, d\mu_y$ сходится при каждом $x \in E$. Пусть, кроме того,* 1) *в окрестности точки $x_0 \in E_1$ интеграл $J(x)$ сходится равномерно и* 2) *функция f ограничена на каждом множестве $E_1 \times A$, где $A \in \mathfrak{A}$.*

Тогда функция J непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Достаточно проверить лишь условие 2) теоремы 3 (с функцией $g: g(y) = f(x_0, y)$ $(y \in E)$). В силу предположенной ограниченности функции f на множестве $E_1 \times A$ и того факта, что мера множества A конечна,* мы немедленно получаем равномерную суммируемость функции f на множестве A в окрестности каждой точки $x \in E_1$ и, в частности, в окрестности точки x_0. Остается сослаться на теорему 2 § 2 (в которой вместо множества E следует рассматривать множество A).

Теорема доказана.

Замечание. В условии 2) достаточно требовать ограниченности функции f лишь на множествах $(V(x_0) \cap E_1) \times A$ $(A \in \mathfrak{A})$, где $V(x_0)$ — некоторая окрестность точки x_0.

Следствие. *Пусть* $E_1 = \langle a, b \rangle$, *функция* f *непрерывна на множестве* $E_1 \times E$. *Если несобственный интеграл* $J(x) = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\, d\mu_y$ *равномерно сходится на множестве* E_1 *или хотя бы равномерно сходится в окрестности каждой точки* $x_0 \in E_1$, *то* J *есть непрерывная функция на множестве* E_1.

Доказательство. Если множество E_1 есть замкнутый промежуток, то функция f ограничена на множестве $E_1 \times A$ в силу теоремы Вейерштрасса. Если же промежуток $\langle a, b \rangle$ не замкнут, то можно воспользоваться замечанием к теореме, так как каждая точка $x_0 \in \langle a, b \rangle$ имеет окрестность, пересечение которой с промежутком $\langle a, b \rangle$ замкнуто. Ясно, что следствие все еще справедливо, если E_1 — любое замкнутое или открытое подмножество пространства R^ν.

Перейдем к вопросу о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

Теорема 5 (3.III). *Пусть* $E_1 = \langle a, b \rangle$ *и интеграл* $J(x) = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\, d\mu_y$ *сходится при каждом* $x \in \langle a, b \rangle$. *Предположим, что*

1) *функция* f *непрерывна на множестве* $E_1 \times E$ *и имеет на нем непрерывную частную производную* $D^{(1)} f$;

2) *интеграл* $\int\limits_{(E, \mathfrak{A})} D^1 f(x, y)\, d\mu_y$ *равномерно сходится в окрестности точки* $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Тогда функция J *имеет в точке* x_0 *конечную производную, причем*

$$J'(x_0) = \int\limits_{(E, \mathfrak{A})} D^{(1)} f(x, y)\, d\mu_y \quad (\textit{правило Лейбница}). \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем число $h \neq 0$ так, что $x_0 + h \in \langle a, b \rangle$.

---

* Как было условлено в начале п. 3.2, это всегда предполагается.

Рассмотрим отношение $\frac{J(x_0+h)-J(x_0)}{h}$:

$$\frac{J(x_0+h)-J(x_0)}{h}=\int\limits_{(E,\mathfrak{A})}\frac{f(x_0+h,\ y)-f(x_0,\ y)}{h}\,d\mu_y=$$
$$=\int\limits_{(E,\mathfrak{A})}F(h,\ x)\,d\mu_y, \tag{3}$$

где $F(h,\ y)=\frac{f(x_0+h,\ y)-f(x_0,\ y)}{h}$ $(h\neq 0,\ x_0+h\in E_1,\ y\in E)$.

Положим $F(0,\ y)=D^{(1)}f(x_0,\ y)$ $(y\in E)$.

Переходя в (3) к пределу под знаком интеграла, мы сразу получаем существование производной $J'(x_0)$ и требуемое равенство (2). Для обоснования законности предельного перехода под знаком интеграла мы должны проверить выполнение условий теоремы 3. Выполнение условия 1) очевидно, выполнение условия 2) следует из теоремы 2 (2.III), так как функция f, а с нею функция F непрерывна, а множества A $(A\in\mathfrak{A})$ замкнуты, ограниченны и конечной меры. Остается проверить условие 3) теоремы 3, а именно проверить, что интеграл $\int\limits_{(E,\mathfrak{A})}F(h,\ y)\,d\mu_y$ равномерно сходится в окрестности точки $h=0$. Для этого мы используем теорему 1. Фиксируя произвольные множества $\widetilde{A}$, $A\in\mathfrak{A}$, имеем

$$\int\limits_{A}F(h,\ y)\,d\mu_y-\int\limits_{\widetilde{A}}F(h,\ y)\,d\mu_y=\frac{1}{h}\left\{\left[\int\limits_{A}f(x_0+h,\ y)\,d\mu_y-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int\limits_{\widetilde{A}}f(x_0+h,\ y)\,d\mu_y\right]-\left[\int\limits_{A}f(x_0,\ y)\,d\mu_y-\int\limits_{\widetilde{A}}f(x_0,\ y)\,d\mu_y\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{h}\left[\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)\right], \tag{4}$$

где мы положили $\Phi(x)=\int\limits_{A}f(x,\ y)\,d\mu_y-\int\limits_{\widetilde{A}}f(x,\ y)\,d\mu_y$. По теореме 3 (2.III), $\Phi'(x)=\int\limits_{A}D^{(1)}f(x,\ y)\,d\mu_y-\int\limits_{\widetilde{A}}D^{(1)}f(x,\ y)\,d\mu_y$. Продолжая равенство (4), получаем

$$\int\limits_{A}F(h,\ y)\,d\mu_y-\int\limits_{\widetilde{A}}F(h,\ y)\,d\mu_y=\Phi'(x_0+\theta h)=$$
$$=\int\limits_{A}D^{(1)}f(x_0+\theta h,\ y)\,d\mu_y-\int\limits_{A}D^{(1)}f(x_0+\theta h,\ y)\,d\mu_y\quad(\theta\in(0,\ 1)).$$

Последнее соотношение показывает, что равномерная сходимость интеграла $\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} F(h, y)\,d\mu_y$ в окрестности точки $h=0$ следует из равномерной сходимости интеграла $\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} D^{(1)}f(x, y)\,d\mu_y$ в окрестности точки $x=x_0$, и, таким образом, условие теоремы 3 проверено и предельный переход, приводящий к равенству (2), обоснован.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если интеграл $\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} D^{(1)}f(x,y)\,d\mu_y$ равномерно сходится на промежутке $\langle a, b\rangle$, то функция J' непрерывна на $\langle a, b\rangle$, как это вытекает из следствия к теореме 4.

Замечание 2. Теорема, аналогичная теореме 5, верна и в случае, когда множество E_1 — открытое подмножество пространства R^{ν}.

В заключение докажем теорему об интегрировании несобственного интеграла по параметру. Как и в теоремах 4 (2.III) и 3(5.II), мы считаем, что E_1 и E — измеримые по Лебегу подмножества множеств R^{ν_1} и R^{ν}, $\mu_x=\mu_{\nu_1}$, $\mu_y=\mu_{\nu}$ — меры Лебега, а $\mathfrak{A}$ — некоторая нормальная система подмножеств множества E.

Теорема 6 (3.III). *Пусть функция f измерима на множестве $E_1\times E$, суммируема на каждом множестве $E_1\times A$ $(A\in\mathfrak{A})$ (относительно меры $\mu_{\nu_1+\nu}$) и интеграл $J(x)=\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ $(x\in E_1)$ сходится равномерно на множестве E_1. Если при этом $\mu_x E_1<+\infty$, то функция J суммируема на множестве E_1, а для функции K $\left(K(y)=\int\limits_{E_1} f(x, y)\,d\mu_x\ (y\in E)\right)$ существует несобственный интеграл*

$$\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} K(y)\,d\mu_y \quad \textit{и} \quad \int\limits_{E_1} J(x)\,d\mu_x=\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} K(y)\,d\mu_y.$$

Доказательство. Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность для системы $\mathfrak{A}$ и $J_n(x)=\int\limits_{A_n} f(x, y)\,d\mu_y$ $(x\in E_1,\ n=1, 2, \ldots)$, то функции J_n суммируемы на множестве E_1 (см. теорему 3 (5.II)) и в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_{(E,\mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ сходятся равномерно на множестве E_1 к функции J. Отсюда следует суммируемость функции J на множестве E_1 (см. следствие из теоремы 3(4.II)). Обращаясь к функции K, мы видим, что она определена и конечна при почти всех $y \in E$ и суммируема на любом множестве $A \in \mathfrak{A}$ (см. теорему 3 (5.II)). Таким образом, $\mathfrak{A}$ — допустимая система для функции K. По теореме Фубини (см. II.5.6) имеем

$$\int_A K(y)\,d\mu_y = \int_{E_1}\left(\int_A f(x, y)\,d\mu_y\right)d\mu_x =$$
$$= \int_{E_1}\left(J(x) - \int_{(E', \mathfrak{A}')} f(x, y)\,d\mu_y\right)d\mu_x =$$
$$= \int_{E_1} J(x)\,d\mu_x - \int_{E_1}\left(\int_{(E', \mathfrak{A}')} f(x, y)\,d\mu_y\right)d\mu_x,$$

где $E' = E \setminus A$ и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap E'$. Отсюда

$$\left|\int_{E_1} J(x)\,d\mu_x - \int_A K(y)\,d\mu_y\right| \leqslant \int_{E_1}\left|\int_{(E', \mathfrak{A}')} f(x, y)\,d\mu_y\right|d\mu_x. \qquad (5)$$

Так как для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого множества $A \supset A_\varepsilon$ $(A, A_\varepsilon \in \mathfrak{A})$ для всех $x \in E_1$ выполняется неравенство $\left|\int_{(E', \mathfrak{A}')} f(x, y)\,d\mu_y\right| < \varepsilon$, то

$$\left|\int_{E_1} J(x)\,d\mu_x - \int_A K(y)\,d\mu_y\right| \leqslant \varepsilon\mu_x E_1.$$

Это и означает, что интеграл $\int_{(E, \mathfrak{A})} K(y)\,d\mu_y$ сходится и равен $\int_{E_1} J(x)\,d\mu_x$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $E_1 = [p, q]$ $([p, q] \subset R^1)$ *и функция* f *непрерывна на множестве* $E_1 \times E$, *то равенство*

$$\int_p^q\left(\int_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y\right)dx = \int_{(E, \mathfrak{A})}\left(\int_p^q f(x, y)\,dx\right)d\mu_y$$

справедливо при единственном условии, что интеграл* $\int_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ *равномерно сходится на промежутке* $[p, q]$.

Замечание. Если $\left|\int_A f(x, y)\,d\mu_y\right| \leqslant \varphi(x)$ $(x \in E_1,\ A \supset A_0,$ $A, A_0 \in \mathfrak{A})$, где φ — суммируемая на множестве E_1 функция, то теорема верна и в случае, когда $\mu_x E_1 = +\infty$, притом даже без предположения о равномерной сходимости интеграла $J(x) = \int_{(E, \mathfrak{A})} f(x, y)\,d\mu_y$ на множестве E_1.

---

* Надо помнить, однако, что система $\mathfrak{A}$ состоит из ограниченных замкнутых множеств.

Доказательство. Мы ограничимся доказательством замечания в случае, когда $E=[a, +\infty)$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\infty)\cap E$ и μ_y — мера Лебега. Тогда неравенство $\left|\int\limits_A f(x, y)\,d\mu_y\right| \leqslant \varphi(x)$ $(x\in E_1,\ A\supset A_0)$ превращается в неравенство

$$\left|\int\limits_a^l f(x, y)\,dy\right| \leqslant \varphi(x) \quad (a\leqslant l_0\leqslant l<+\infty,\ x\in E_1).$$

Оно влечет суммируемость функции J (так как $|J(x)|\leqslant\varphi(x)$ $(x\in E)$) и неравенство

$$\omega(x, l)=\left|\int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dy\right|=\left|J(x)-\int\limits_a^l f(x, y)\,dy\right|\leqslant 2\varphi(x) \quad (l\geqslant l_0).$$

Ввиду сходимости интеграла $J(x)$ при каждом $x\in E_1$ имеем $\omega(x, l)\underset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Переписывая теперь неравенство (5) в виде

$$\left|\int\limits_{E_1} J(x)\,d\mu_x-\int\limits_a^l K(y)\,dy\right|\leqslant\int\limits_{E_1}\omega(x, l)\,d\mu_x \quad (l\geqslant l_0),$$

мы получаем, что $\int\limits_a^l K(y)\,dy\underset{l\to+\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{E_1} J(x)\,d\mu_x$, так как (по теореме 1 (2.III)) $\int\limits_{E_1}\omega(x, l)\,d\mu_x\underset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.3. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить интеграл $\alpha_0=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy$. Вместо данного интеграла рассмотрим интеграл, зависящий от параметра, введя «множитель сходимости», который обеспечивает суммируемость подынтегральной функции при $x>0$

$$J(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,\frac{\sin y}{y}\,dy \quad (x>0).$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy$ сходится, то по следствию к теореме 2′ (с функцией $g: g(x, y)=e^{-xy}$ $(x\geqslant 0,\ y>0)$) интеграл $J(x)$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$. По теореме 4 функция J непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$. Поэтому $\alpha_0=J(0)=\lim\limits_{x\to+0} J(x)$. Однако, как мы знаем, при $x>0$ $J(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$. Таким образом, $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$.

Мы уже показали (пример 1 § 1), что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \omega y}{y} dy = \alpha_0 \operatorname{sign} \omega$, и теперь получаем окончательно $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \omega y}{y} dy = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \omega$.

Подчеркнем, что в рассмотренном примере предельный переход при $x \to +0$ привел от суммируемых при фиксированном $x > 0$ функций $f^x \left(f(x, y) = e^{-xy} \frac{\sin y}{y} \ (x, y > 0) \right)$ к несуммируемой на промежутке $[0, +\infty)$ функции $\frac{\sin y}{y}$ $(y > 0)$.

Укажем еще один способ вычисления интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$, основанный на замечании к теореме 6. При этом мы используем следующие легко получаемые равенства:

а) $\int\limits_0^l e^{-xy} \sin y dy = \frac{1 - e^{-lx} \cos l - x e^{-xl} \sin l}{1 + x^2}$ $(x > 0)$;

а′) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin y dy = \frac{1}{1 + x^2}$ $(x > 0)$;

б) $\frac{1}{y} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ $(y > 0)$.

Если допустить возможность изменения порядка интегрирования, то мы немедленно имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin y dx \right) dy =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin y dy \right) dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Изменение порядка интегрирования будет оправдано, если мы убедимся, что интеграл $\int\limits_0^l e^{-xy} \sin y dy$ при всех $l \geqslant l_0$ мажорируется функцией, суммируемой на промежутке $(0, +\infty)$. Это в самом деле так:

$$\left| \int\limits_0^l e^{-xy} \sin y dy \right| \leqslant \frac{2}{1 + x^2} + \frac{x e^{-xl}}{1 + x^2} \leqslant \frac{2}{1 + x^2} + \frac{x e^{-x}}{1 + x^2} \ (x > 0, l \geqslant l_0 = 1)$$

и

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{xe^{-x}}{1+x^2}\right)dx<+\infty.$$

Пример 2. Вычислить интеграл Лапласа

$$J(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}dy \quad (x\in(-\infty,\ +\infty)).$$

Дифференцируя по параметру (при $x>0$), получаем

$$J'(x)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}dy \quad (x>0).$$

Функция $\frac{y\sin xy}{1+y^2}$ не суммируема на промежутке $[0,\ +\infty)$, однако дифференцирование под знаком интеграла при $x>0$ законно, так как, по теореме 2, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}dy$ равномерно сходится на любом сегменте $[a,\ b]$ $(0<a<b<+\infty)$ и, значит, равномерно сходится в окрестности каждой точки промежутка $(0,\ +\infty)$, что достаточно для применения теоремы 5. Дальнейшее дифференцирование по параметру невозможно, но нас выручает искусственный прием. Очевидно,

$$J'(x)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy-\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y(1+y^2)}dy-\frac{\pi}{2}.$$

Теперь, когда «медленно сходящаяся» часть выделена из интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}dy$, мы снова можем дифференцировать по параметру под знаком интеграла: $J''(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}dy$ (при $x>0$). Таким образом, $J''(x)=J(x)$ при $x>0$. Как известно из теории дифференциальных уравнений, в этом случае

$$J(x)=C_1e^x+C_2e^{-x} \quad (\text{при } x>0),$$

и нам остается определить постоянные C_1 и C_2. Постоянная C_1 равна нулю, так как иначе $|J(x)|\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, что невозможно, так как $|J(x)|\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, $J(x)=C_2e^{-x}$ при $x>0$. Так как функция J непрерывна в нуле (теорема 2(2.III)), то равенство $J(x)=C_2e^{-x}$ сохраняется и при $x=0$, откуда получаем $C_2 = J(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$. Итак, $J(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ при $x \geqslant 0$, а в силу очевидной четности функции J имеем окончательно

$$J(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \text{ при любом } x \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда, дифференцируя, получаем второй интеграл Лапласа $I(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{1+y^2}$. В самом деле, $I(x) = -J'(x)$ при $x > 0$ и $I(0) = 0$, так что ввиду нечетности функции I

$$I(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \operatorname{sign} x \quad (x \in (-\infty, +\infty)).$$

Пример 3. Вычислить *интеграл Френеля*: $J = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

При решении мы используем равенства а) и а′) из примера 1, а также равенства:

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

г) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t > 0)$.

Равенство в) получается элементарно, а равенство г) — с помощью интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ (см. гл. II, § 6).

С помощью подстановки ($x^2 = t$) немедленно убеждаемся (см. теорему 6 (1.III)), что интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

сходится.

Используя равенство г), приходим к повторному интегралу

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t \, du \right) dt.$$

Изменение порядка интегрирования (к чему мы стремимся) будет оправдано, если мы проверим, что (как этого требует замечание к теореме 6) при любом $l > 0$ справедливо неравенство $\left|\int\limits_0^l e^{-tu^2}\sin t\,dt\right| \leqslant \varphi(u)\quad (u>0)$, где φ—суммируемая на промежутке $[0, +\infty)$ функция.

С помощью а) получаем оценку

$$\left|\int\limits_0^l e^{-tu^2}\sin t\,dt\right| \leqslant \frac{2}{1+u^4}+\frac{u^2}{1+u^4}=\varphi(u),$$

и функция φ, очевидно, суммируема.

Изменив порядок интегрирования и используя а′) и в), немедленно имеем

$$J=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t\,dt\right)du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Совершенно аналогично может быть вычислен интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ И ФУНКЦИЯХ

Цель этого добавления состоит главным образом в уточнении теоретико-множественной терминологии, применяемой в книге. Мы будем исходить из уверенности в том, что смысл слова „множество" ясен каждому и что его употребление не может привести к какой-либо двусмысленности. Мы ограничимся лишь тем, что разъясним наше понимание термина „множество", перечислив несколько синонимов, из которых лишь первый (несомненно, в силу второстепенных и случайных причин) стал математическим термином: „множество", „совокупность", „собрание", „набор", „коллекция", „система".

Каждое множество состоит из каких-то вещей, объектов, или, как часто говорят, элементов. Читателю, вероятно, уже встречалась запись

$$x \in A,$$

которая означает, что вещь x принадлежит множеству A, или что вещь x служит элементом множества A.

То обстоятельство, что вещь x не принадлежит множеству A, записывается так:

$$x \overline{\in} A.$$

Напомним еще, что если A и B — два множества, то запись

$$A \subset B \text{ (или } B \supset A)$$

означает, что для любой вещи x из того, что $x \in A$, следует, что $x \in B$, или что всякий элемент множества A является элементом множества B. В этом случае говорят также, что множество A есть подмножество множества B, или что множество A есть часть множества B, или, наконец, что множество A содержится в множестве B.

Мы будем постоянно использовать известный „принцип объемности". Так называют утверждение, состоящее в том, что два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Говоря точно, „принцип объемности“ означает равносильность следующих двух утверждений:

Множество A равно множеству B;

$A \subset B$ и $B \subset A$.

1. На протяжении всей этой книги мы предполагаем, что читателю известны три следующих конкретных множества: множество R всех конечных вещественных чисел (называемое также вещественной прямой), множество $\overline{R}$, состоящее из всех конечных вещественных чисел и из двух несобственных вещественных чисел: $+\infty$ (читается „плюс бесконечность“) и $-\infty$ (читается „минус бесконечность“) и множество R^2 всех комплексных чисел (см. ниже).

Множество $\overline{R}$ называют иногда *расширенной вещественной прямой.*

Для любых двух элементов x и y множества $\overline{R}$ верно одно и только одно из трех: либо $x < y$, либо $x > y$, либо $x = y$. При этом $-\infty < x < +\infty$, каково бы ни было число $x \in R$. Мы считаем известными свойства операций сложения и умножения конечных вещественных чисел. (По поводу сложения см. начало добавления 2.) Что касается сложения и умножения элементов множества $\overline{R}$, то мы принимаем следующее определение.

Определение 1.

$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$, каково бы ни было число $a \in \overline{R}$, отличное от $-\infty$;

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$, каково бы ни было число $a \in \overline{R}$, отличное от $+\infty$;

$(+\infty) a = a (+\infty) = +\infty$, каково бы ни было положительное число $a \in \overline{R}$;

$(+\infty) a = a (+\infty) = -\infty$, каково бы ни было отрицательное число $a \in \overline{R}$;

$(-\infty) a = a (-\infty) = -\infty$, каково бы ни было положительное число $a \in \overline{R}$;

$(-\infty) a = a (-\infty) = +\infty$, каково бы ни было отрицательное число $a \in \overline{R}$;

$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$; $0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0.$

Последнее соглашение не общепринято, однако для наших целей оно очень удобно.

Подчеркнем, что символам $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{a}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ мы не приписываем никакого смысла

В этой книге часто встречается такой оборот: „сумма $x+y$ чисел $x, y \in \overline{R}$ имеет смысл". Эта фраза означает, что либо одно из чисел x и y конечно, либо $x=y=+\infty$, либо $x=y=-\infty$.

Символом N мы будем обозначать множество всех натуральных чисел. Мы неоднократно будем использовать следующие свойства множества N.

1) Если X — какое-нибудь подмножество N, содержащее хоть одно число, то множество X содержит наименьший элемент, т. е. существует такое натуральное число $k \in X$, что $k \leqslant n$ при всех $n \in X$.

2) (Принцип Архимеда.) Каково бы ни было конечное вещественное число x (т. е. $x \in R$), существует натуральное число n такое, что $x < n$.

3) (Принцип индукции.) Если множество X удовлетворяет следующим трем условиям: $X \subset \mathbf{N}$; $1 \in X$; из того, что $n \in X$, следует, что $n+1 \in X$, то $X=\mathbf{N}$.

Символом $\mathbf{N}_k$, где $k \in \mathbf{N}$, мы всегда будем обозначать множество всех натуральных чисел, не превосходящих k. Символом Z мы будем обозначать множество всех целых чисел, т. е. множество, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и из всех чисел вида $(-n)$, где $n \in \mathbf{N}$. Отметим, что если $A \subset Z$, если множество A содержит хоть один элемент и если существует число $L \in R$, такое, что $x \leqslant L$ при всех $x \in A$, то множество A содержит наибольший элемент (т. е. такое число $m \in A$, что $x \leqslant m$ при всех $x \in A$).

Итак, в нашем распоряжении имеется конкретное множество $\overline{R}$. Все конкретные множества, встречающиеся в этой книге, построены из множества $\overline{R}$ и его подмножеств. Ниже идет речь о том, как из уже имеющихся множеств можно образовать новые.

2. Начнем с того, что введем так называемое пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента. Это множество обозначают символом Λ. Какова бы ни была вещь x, верно следующее:

$$x \overline{\in} \Lambda.$$

Ясно, что каково бы ни было множество B, выполнено включение $\Lambda \subset B$. Если требуется подчеркнуть, что множество A содержит хоть один элемент, то говорят, что множество A не пусто.

Пусть теперь A — какое-нибудь множество, P — какое-нибудь свойство, а символ $P(x)$ обозначает утверждение, состоящее в том, что вещь x обладает свойством P.

Можно рассматривать множество B, состоящее из всех элементов множества A, обладающих свойством P.

Это множество B обозначается обычно так:

$$\{x \in A : P(x)\}.$$

Ясно, что $B \subset A$.

Итак, всякое свойство P порождает некоторое подмножество множества A. Ясно, что и наоборот, если B — подмножество множества A, то имеется свойство P такое, что

$$B = \{x \in A : P(x)\}.$$

Например, в качестве P можно взять свойство вещи x, заключающееся в принадлежности к множеству B.

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Если речь идет о свойстве P вещи x удовлетворять неравенству $x \leqslant b$ и одновременно неравенству $x \geqslant a$, где a и b — вещественные числа, то в соответствии с только что высказанным принципом возникает множество

$$\{x \in \overline{R} : a \leqslant x \text{ и } x \leqslant b\}$$

или

$$\{x \in \overline{R} : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Это последнее множество обозначают так: $[a, b]$. Его называют замкнутым промежутком с концами a, b.

Аналогично определяются открытый промежуток:

$$(a, b) = \{x \in \overline{R} : a < x < b\}$$

и полуоткрытые промежутки:

$$[a, b) = \{x \in \overline{R} : a \leqslant x < b\}, \ (a, b] = \{x \in \overline{R} : a < x \leqslant b\}.$$

Пример 2. Если $x \in A$, то, снова в соответствии с нашим принципом, можно образовать множество

$$\{z \in A : z = x\}.$$

Единственным элементом множества, обозначаемого символом $\{x\}$, служит x. Одноэлементное множество $\{x\}$ нужно отличать от самого элемента x. Если x, $y \in A$, то множество

$$\{z \in A : z = x \text{ или } z = y\}$$

называют *парой элементов* x, y и обозначают так: $\{x, y\}$ (или $\{y, x\}$). Подобным же образом можно образовывать тройки, четверки и т. д. элементов множества A.

Вот еще один принцип, позволяющий по каждому множеству A строить новое множество: если A — множество, то можно рассматривать множество всех подмножеств множества A. Это новое множество (называемое иногда для благозвучия *системой* всех подмножеств множества A) мы будем обозначать символом $\mathfrak{P}[A]$.

Мы считаем далее, что каковы бы ни были два множества A и B, существует множество C такое, что $A \subset C$ и $B \subset C$.

В заключение этого пункта условимся еще в одном обозначении. Предположим, что $T(x)$ — высказывание, имеющее смысл при каждом x, принадлежащем некоторому множеству E. Запись

$$T(x) \quad (x \in E)$$

будет означать, что утверждение $T(x)$ истинно при любом x, принадлежащем множеству E. Например,

$$\sin x > 0 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right),$$

или

$$\frac{n}{n+1} < 1 \quad (n \in \mathrm{N}).$$

Точно так же, если $T(x, y, \ldots, z)$ — какое-нибудь утверждение, имеющее смысл при всех x, принадлежащих множеству A, при всех y, принадлежащих множеству B, и т. д., то запись

$$T(x, y, \ldots, z) \quad (x \in A, \; y \in B, \; \ldots, \; z \in C)$$

будет означать, что утверждение $T(x, y, \ldots, z)$ истинно, каковы бы ни были элементы $x\,(x \in A)$, $y\,(y \in B)$, $\ldots$, z $(z \in C)$.

Вместо

$$T(n) \quad (n \in \mathrm{N})$$

мы будем писать иногда

$$T(n) \quad (n = 1, \; 2, \ldots),$$

а вместо

$$T(n) \quad (n \in \mathrm{N}_k) \; -$$

$$T(n) \quad (n = 1, \; 2, \ldots, \; k).$$

3. Наряду с понятием множества очень важную роль в математике играет понятие отображения. Читатель вполне может считать это понятие первичным и так же, как понятие множества, не сводимым к другим, более простым понятиям. В действительности, смысл слова „отображение" может быть определен совершенно точно с помощью одного лишь понятия множества.

Сейчас мы, не пытаясь дать точное определение, постараемся описать содержание термина „отображение". Это слово в математике имеет целый ряд синонимов. Таковы слова: „функция", „оператор", „преобразование", „закон соответствия", „семейство" (к последнему термину мы еще вернемся).

Пусть X и Y — два каких-нибудь множества и пусть φ — правило, согласно которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие элемент множества Y. Вот это правило φ и называют *отображением множества X в множество Y* (или *отображением, заданным на множестве X со значениями в множестве Y*). Тот элемент множества Y, который в силу правила φ соответствует элементу x множества X, обозначается символом $\varphi(x)$ и называется *значением отображе-*

ния φ на элементе x, или *образом элемента x при отображении φ.*

Следует подчеркнуть, что каждому элементу x множества X соответствует *один единственный* образ $\varphi(x)$.

Необходимо ясно понимать разницу между отображением φ и значением $\varphi(x)$ отображения φ на элементе x. Первое, как сказано выше, есть некое правило, закон соответствия. Второе — это элемент множества Y, соответствующий элементу x по правилу φ. Таким образом, φ и $\varphi(x)$ — это совершенно разные вещи.

Желая определить какое-нибудь отображение, мы будем говорить, например, так: „отображение φ со значениями в множестве R, заданное на промежутке $[-1,1]$ следующим образом: $\varphi(x)=x^2$ $(x \in [-1,1])$". Последняя строчка читается так: значение отображения φ в точке x равно x^2 при всяком x, принадлежащем промежутку $[-1,1]$.

Если φ — отображение множества X в множество Y, то говорят, что отображение φ *определено (или задано) на множестве X,* а множество X называют *множеством* (или *областью*) *определения* (или *задания*) отображения φ; если при этом $X_1 \subset X$, то говорят, что *отображение φ задано по крайней мере на множестве X_1.*

Если φ_1 и φ_2 — два отображения, то они равны в том и только в том случае, когда, во-первых, их множества задания равны и, во-вторых, при всяком x из их (общего) множества задания значения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают.

Если X_1 и X_2 — два множества, $X_1 \subset X_2$, а φ_i — отображения множества X_i в множество Y $(i=1, 2)$, такие, что $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ при всех $x \in X_1$, то говорят, что φ_2 есть *продолжение отображения* φ_1 с множества X_1 *на множество* X_2 или что φ_1 есть *сужение отображения* φ_2 *на множество* X_1, и пишут

$$\varphi_1 \subset \varphi_2 \quad \text{или} \quad \varphi_1=\varphi_2|_{X_1}.$$

Символом $\varphi[A]$, где φ — отображение, заданное по крайней мере на множестве A со значениями в множестве Y, обозначают множество $\{y \in Y: \text{существует } x \in A \text{ такой, что } \varphi(x)=y\}$ (иногда мы будем применять не столь подробное обозначение: $\{y \in Y: y=\varphi(x) \text{ и } x \in A\}$.

Множество $\varphi[A]$ называют *образом множества A при отображении φ.* Если $\varphi[A]=Y$, то говорят, что φ отображает множество A *на* множество Y.

Если φ — отображение, заданное на множестве X со значениями в множестве Y, а $Y_0 \subset Y$, то символом $\varphi^{-1}[Y_0]$ обозначают множество

$$\{x \in X: \varphi(x) \in Y_0\}.$$

Множество $\varphi^{-1}[Y_0]$ называют *прообразом множества Y_0 при отображении φ.*

При этом не требуется, чтобы $Y_0 \subset \varphi[X]$, так что $\varphi^{-1}[Y_0]$ может оказаться пустым.

Определение 1. Пусть φ — отображение множества X в множество Y и пусть $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, каковы бы ни были различные элементы x_1 и x_2 множества X. Тогда отображение φ называют *взаимнооднозначным*.

Если φ — взаимнооднозначное отображение множества X в множество Y, то, как легко видеть, каждому элементу $y \in \varphi[X]$ соответствует *единственный* элемент $x \in X$, такой, что

$$\varphi(x) = y.$$

Тем самым возникает отображение g множества $\varphi[X]$ на множество X такое, что

$$g(\varphi(x)) = x$$

при всех $x \in X$. Это отображение g называют *обратным* к отображению φ и обозначают символом φ^{-1}.*

Определение 2. Пусть φ — отображение множества X в множество Y, а ψ — отображение, заданное по крайней мере на $\varphi[Y]$ со значениями в множестве Z. Рассмотрим отображение, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие элемент $\psi(\varphi(x))$ множества Z. Это отображение называется *суперпозицией* отображений ψ и φ, или *сложным отображением*, составленным из отображений ψ и φ. Обозначают его так: $\psi(\varphi)$, $\psi \circ \varphi$.

Мы уже упоминали, что вместо слова „отображение" иногда употребляют слово „семейство". В этом случае принято элементы множества задания называть индексами, множество задания отображения—множеством индексов семейства; вместо „значение отображения на данном элементе" говорят „элемент или член семейства с данным индексом". Термину „семейство" сопутствуют и своеобразные обозначения. Они таковы:

$$\{\varphi_x\} \quad (x \in X). \tag{1}$$

Так обозначается семейство φ с множеством индексов X; вместо $\varphi(x)$ пишут φ_x.

Если $X_0 \subset X$, то семейство

$$\{\varphi_x\} \quad (x \in X_0)$$

(иначе говоря, сужение соответствующего отображения на множество X_0) называют подсемейством семейства (1).

Если множеством индексов служит множество $\mathbf{N}$, то семейство называют *последовательностью* и обозначают так: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где x_n — элемент семейства с индексом n. Семейство, элементы которого—вещественные и комплексные числа (по поводу комплексных чисел см. ниже), мы будем называть

* Не путать с функцией $\frac{1}{\varphi}$ (см. ниже) в том случае, когда $\varphi[X] \subset R$!

числовым семейством. Если элементы семейства φ принадлежат системе подмножеств некоторого множества A, то мы будем говорить, что φ — семейство множеств (или подмножеств множества A).

Отметим, что с каждым множеством X связано так называемое тождественное отображение этого множества на себя. Так называют отображение I_X, заданное на X и такое, что

$$I_X(x) = x$$

при всех $x \in X$. Это отображение I_X можно, конечно, называть и семейством, для которого X служит множеством индексов.

Таким образом, каждое множество X порождает стандартным образом некоторое семейство I_X. Конечно, и каждому семейству отвечает некоторое множество, а именно множество всех его элементов. Но вполне может случиться, что разные семейства имеют одно и то же множество элементов.

Исходя из понятия отображения, можно дать определение упорядоченной пары элементов x и y множества A.

Определение 3. Пусть φ — такое отображение множества X, состоящего из чисел 1 и 2, в множество A, что $\varphi(1) = x$, $\varphi(2) = y$. Тогда отображение φ называется *упорядоченной парой элементов* x и y и обозначается символом (x, y). Элемент x называется *первым,* а элемент y — *вторым* элементом упорядоченной пары (x, y).

Конечно, можно говорить об упорядоченной паре элементов (x, y), принадлежащих разным множествам: $x \in A$, $y \in B$. Ведь в соответствии со сказанным в конце п. 2 множества A и B содержатся в некотором множестве C.

Аналогично определяется упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ какого-нибудь множества.

Воспользуемся этим определением, чтобы напомнить читателю, что упорядоченную пару (x, y), где $x \in R$ и $y \in R$, называют *комплексным числом.* Множество всех комплексных чисел обозначается символом R^2 (см. еще п. 5). Если $z \in R^2$, $z = (x, y)$, то вещественное число x, называемое вещественной частью комплексного числа z, мы будем обозначать так: $x = \operatorname{Re} z$, а число y, называемое мнимой частью комплексного числа, так: $y = \operatorname{Im} z$.

Символом $|z|$ будет, как обычно, обозначаться модуль комплексного числа z:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Читателю, конечно, хорошо известны правила действий с комплексными числами и их обычная запись, использующая мнимую единицу $i = (0, 1)$.

Вещественное число x принято отождествлять с комплексным числом $(x, 0)$. Имея в виду это отождествление, мы будем считать, что всякое вещественное число является одновременно и комплексным.

Подчеркнем еще раз, что в п. 3 не содержится никакого определения отображения. Разъясняя наше понимание этого термина, мы употребляли слова „правило", „закон соответствия", которые ничуть не более понятны, чем само слово „отображение". Можно было бы дать настоящее определение отображения, опирающееся лишь на понятие множества. Мы думаем, однако, что сказанного в п. 3 достаточно для правильного понимания этой книги.

4. Слово „функция" означает ровно то же самое, что и слово „отображение". Однако в этой книге, если не оговорено противное, словом „функция" будет обозначаться отображение какого-нибудь множества в множество $\overline{R}$ или в R^2.

Определение 1.

1. Если все значения отображения f содержатся в множестве $\overline{R}$, то f называется *вещественной функцией.*

2. Если все значения функции f содержатся в множестве R, то мы будем называть f *конечной* вещественной функцией.

3. Если, наконец, все значения отображения f содержатся в множестве R^2, то f называют *комплексной* функцией.

4. Функция f, заданная по крайней мере на множестве X и такая, что

$$f(x) \geqslant 0 \quad (x \in X),$$

называется *неотрицательной на множестве* X.

5. Если f и g — две функции, заданные на множестве X, то символом $f+g$ обозначается функция, заданная на множестве $X_1 = \{x \in X$: сумма $f(x)+g(x)$ имеет смысл$\}$ (см. определение 1 п. 1) следующим образом:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in X_1).$$

Аналогично определяются функции fg и λf, где $\lambda \in \overline{R}$. Функция $f+g$ называется суммой функций f и g, а fg — произведением функций f и g.

6. Мы будем говорить, что функция f не превосходит функции g, и мы будем писать $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in X$.

7. Если f — функция, заданная на множестве X, то символом $|f|$ мы будем обозначать функцию, заданную на множестве X так: *

$$|f|(x) = |f(x)| \quad (x \in X).$$

8. С вещественной функцией f, множеством задания которой служит множество X, мы часто будем связывать две *неотрицательные* функции f^+ и f^-, определенные на множестве X следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x),\ 0\}, \\ f^-(x) &= \max\{-f(x),\ 0\} \end{aligned}\right\} \quad (x \in X).$$

---

* $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Отметим простые тождества:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x), \\ |f(x)|=f^{+}(x)+f^{-}(x) \end{array}\right. \quad (x\in X).$$

Предположим, что λ — число и что f — функция, заданная на множестве X и такая, что

$$f(x)=\lambda \quad (x\in X).$$

В этом случае говорят, что функция f *постоянна* на множестве X. Разумеется, функция f и число λ — это разные вещи. Но иногда в тех случаях, когда ясно, каково множество задания постоянной функции f, единственным значением которой служит число λ, пишут $f=\lambda$.

Если f — вещественная функция, заданная по крайней мере на множестве $X\,(X\neq\Lambda)$, то символом

$$\sup_{x\in X} f(x)$$

мы будем обозначать наименьшее из вещественных чисел M таких, что

$$f(x)\leqslant M \quad (x\in X),$$

а символом

$$\inf_{x\in X} f(x)$$

— наибольшее из вещественных чисел m таких, что

$$m\leqslant f(x) \quad (x\in X).$$

Как известно, $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ всегда существуют. Число $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ принято называть точной нижней границей функции f на множестве X, а $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ — точной верхней границей функции f на множестве X. Если $\{f_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — семейство вещественных функций, заданных на множестве X, то $\sup\limits_{\xi\in\Xi} f_\xi$ и $\inf\limits_{\xi\in\Xi} f_\xi$ обозначают функции, заданные на множестве X следующим образом:

$$(\sup_{\xi\in\Xi} f_\xi)(x)=\sup_{\xi\in\Xi} f_\xi(x), \quad (\inf_{\xi\in\Xi} f_\xi)(x)=\inf_{\xi\in\Xi} f_\xi(x).$$

В заключение этого пункта займемся функциями, заданными на множестве $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, иначе говоря — числовыми последовательностями.

Мы будем считать известным понятие предела последовательности конечных вещественных чисел (или комплексных чисел). Однако в этой книге встречается понятие предела последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n\in\overline{R}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Определению этого понятия предпошлем определение окрестности в $\overline{R}$.

Определение 2. Пусть $x \in \overline{R}$. Если $x \in R$, то *окрестностью* точки x (в $\overline{R}$) называют любое множество $V \subset \overline{R}$, содержащее промежуток $(x-\delta, x+\delta)$, где δ — некоторое положительное число. Если $x=+\infty$, то *окрестностью точки* x (в $\overline{R}$) называется любое множество $V \subset \overline{R}$, содержащее промежуток $(a, +\infty)$, где a — некоторое конечное вещественное число. Если $x=-\infty$, то *окрестностью точки* x (в $\overline{R}$) называется любое множество $V \subset \overline{R}$, содержащее промежуток $[-\infty, a]$, где $a \in R$.

Определение 3. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел ($x_n \in \overline{R}$, $n=1, 2, \ldots$) и пусть $a \in \overline{R}$. Говорят, что a есть *предел последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (и пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если для любой окрестности V точки a (в $\overline{R}$) существует натуральное число n_V такое, что $x_n \in V$ при всех $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих неравенству $n > n_V$.

Нетрудно проверить, что для пределов последовательностей вещественных чисел верны многие теоремы теории пределов последовательностей конечных вещественных чисел, в частности теорема о пределе подпоследовательности. Разумеется, не всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ вещественных чисел имеет предел. Но со всякой последовательностью вещественных чисел можно связать так называемый верхний и нижний пределы.

Определение 4. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел, то число

$$\inf_{k\in\mathbf{N}} \big(\sup_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ n\geqslant k}} x_n\big)$$

называется *верхним пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается так: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Число

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \big(\inf_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ n\geqslant k}} x_n\big)$$

называется *нижним пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается так: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. Ясно, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Предложение 1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Следующие утверждения равносильны:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$.

Доказательство. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и проверим, что тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant a$. Допустим противное. Тогда найдется число a' такое, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n > a' > a$,

$$\inf_{k\in\mathbf{N}}\,(\sup_{n\in\mathbf{N},\, n\geqslant k} x_n) > a', \text{ т. е. } \sup_{n\in\mathbf{N},\, n\geqslant k} x_n > a' \text{ при всех } k\in\mathbf{N}.$$

Но это значит, что при любом $k\in\mathbf{N}$ найдется число $n_k\in\mathbf{N}$, такое, что $n_k\geqslant k$ и $x_{n_k} > a'$. Но ведь $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и мы получаем $a\geqslant a'$, что нелепо. Рассуждая аналогично, проверим, что $a\leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. Итак, $a\leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant a$, т. е. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$.

Допустим теперь, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$.

Предположим, что $a' > a$. Тогда $\inf\limits_{k\in\mathbf{N}}\left(\sup\limits_{n\in\mathbf{N},\, n\geqslant k} x_n\right) < a'$, и потому существует число $k_{a'}\in\mathbf{N}$, такое, что $\sup\limits_{n\in\mathbf{N},\, n\geqslant k_{a'}} x_n < a'$. Но в таком случае $x_n < a'$ при всех $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant k_{a'}$. Если $a = -\infty$, то отсюда уже следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Предположим теперь, что $a'' < a$. Ввиду того, что $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}}\left(\inf\limits_{n\in\mathbf{N},\, n\geqslant k} x_n\right)$, найдется номер $k_{a''}$ такой, что $\inf\limits_{n\in\mathbf{N},\, n\geqslant k_{a''}} x_n > a''$, т. е. $x_n > a''$ при всех $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant k_{a''}$.

Если $a = +\infty$, то отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Если же $-\infty < a < +\infty$, то из сказанного выше ясно, что при $n\geqslant \max\{k_{a'}, k_{a''}\}$ будет $a'' < x_n < a'$, каковы бы ни были числа a', a'', такие, что $a'' < a < a'$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и в этом случае.

Предложение доказано.

Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных функций, заданных на множестве X, то символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n$ мы будем обозначать функцию, заданную на множестве X так:

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n\right)(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) \quad (x\in X).$$

Аналогично определяется функция $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n$.

5. Определение 1. *Произведением двух множеств* A *и* B называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x\in A$, а $y\in B$; это множество обозначают символом $A\times B$.

В этом определении не исключается совпадение множеств A и B. Если же $A \neq B$, то $A \times B$ и $B \times A$ — это разные множества.

Приведем два примера произведений.

Пример 1. Произведение $R \times R$ часто называют плоскостью, а его элементы — точками плоскости, или комплексными числами; обозначают это произведение символом R^2.

Уже из этого примера ясно, что не всякое подмножество произведения $A \times B$ представимо в виде $A_1 \times B_1$, где $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$. Например, множество $\{z \in R^2 \colon z = (x, y),\ x^2 + y^2 < 1\}$ нельзя представить в таком виде.

Пример 2. Пусть $[a, b)$ и $[c, d)$ — два полуоткрытых промежутка числовой прямой. Их произведение $[a, b) \times [c, d)$ называют полуоткрытым прямоугольником. Конечно, $[a, b) \times \times [c, d) \subset R^2$.

Определение 2. Пусть C — подмножество произведения $A \times B$ и пусть $x \in A$. Множество

$$\{y \in B \colon (x, y) \in C\}$$

называется *сечением множества* C, определяемым элементом x, и обозначается символом C^x.

Так, например, если $C \subset R^2$, $C = [a, b) \times [c, d)$, а $x \in R$, то

$$C^x = \begin{cases} [c, d), & \text{если } x \in [a, b), \\ \Lambda, & \text{если } x \overline{\in} [a, b). \end{cases}$$

Из этого примера видно, что сечение может быть пустым множеством.

Рекомендуем читателю найти сечения других подмножеств плоскости R^2, скажем, круга $\{z \in R^2 \colon z = (x, y),\ x^2 + y^2 < 1\}$.

Подчеркнем, что сечение C^x (если оно не пусто) не есть подмножество произведения $A \times B$, но содержится в множестве B. Полезно иметь в виду, что утверждение „$y \in C^x$" равносильно такому: „$(x, y) \in C$".

Определение 3. Если $y \in B$, то аналогично определяется *сечение*

$${}^yC = \{x \in A \colon (x, y) \in C\}.$$

Разумеется, символ ${}^zC$ обозначает не то же самое, что C^z; последний символ обозначает подмножество множества B и имеет смысл лишь тогда, когда $z \in A$ (а первый, когда $z \in B$).

Определение 4. Пусть, по-прежнему, C содержится в произведении $A \times B$. Множество

$$\{x \in A \colon C^x \neq \Lambda\}$$

называют *первой проекцией множества* C и обозначают так: $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} C$.

Так же определяется вторая проекция множества C:

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}} C = \{y \in B \colon {}^yC \neq \Lambda\}.$$

Мы уже видели, что сечение C^x прямоугольника $[a, b) \times \times [c, d)$ не пусто тогда и только тогда, когда $x \in [a, b)$. Стало быть,

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} C = [a, b).$$

Понятно, что $\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}} C = [c, d)$. Легко доказать, что $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} C \subset \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} \widetilde{C}$, если $C \subset \widetilde{C}$.

Определение 5. Пусть $\{A_k\}$ $(k \in \mathbf{N}_\nu)$ — семейство множеств $(\nu \geqslant 2)$. *Произведением*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$$

называется множество всех упорядоченных наборов

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \text{ где } x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_\nu \in A_\nu.$$

Важнейшим примером служит множество

$$\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{\nu \text{ раз}},$$

обозначаемое обычно символом R^ν. Элементы множества R^ν называют *точками* или *векторами*. Если $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in R^\nu$, то число x_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ называют j-й *координатой точки* x.

Символом R^1 мы будем иногда обозначать множество R всех конечных вещественных чисел.

Если $\nu = \nu_1 + \nu_2$ $(\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{N})$, то имеется естественное взаимнооднозначное отображение множества $R^{\nu_1} \times R^{\nu_2}$ на множество R^ν. Это отображение элементу $\big((x_1, x_2, \ldots, x_{\nu_1}), (y_1, y_2, \ldots, y_{\nu_2})\big)$ произведения $R^{\nu_1} \times R^{\nu_2}$ ставит в соответствие точку $(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$ множества R^ν, где $z_j = x_j$ $(j \in \mathbf{N}_{\nu_1})$, $z_j = y_{j-\nu_1}$ $(j = \nu_1 + 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2)$. Имея в виду это отображение, иногда отождествляют множества R^ν и $R^{\nu_1} \times R^{\nu_2}$.

6. Определение 1. Пусть A — множество и

$$\{A_\xi\} \quad (\xi \in \Xi) \tag{2}$$

— семейство его подмножеств (т. е. отображение множества индексов Ξ в множество $\mathfrak{P}$ [A]). Множество $\{x \in A$: существует $\xi \in \Xi$, такое, что $x \in A_\xi\}$ называют *объединением семейства множеств* (2) и обозначают так: $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

Если $\Xi = \mathbf{N}$, то употребляют еще и символ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; если $\Xi = \mathbf{N}_p$ $(p \in \mathbf{N})$, то вместо $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$ часто пишут $\bigcup\limits_{\xi=1}^{p} A_\xi$ или так: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$.

Легко доказать, что если B — такое множество, что $A_\xi \subset B$ при любом $\xi \in \Xi$, то $\{x \in B$: существует $\xi \in \Xi$, такое, что $x \in A_\xi\} = \{x \in A$: существует $\xi \in \Xi$, такое, что $x \in A_\xi\}$.

Таким образом, объединение семейства множеств не зависит от объемлющего множества.

Выше шла речь об объединении *семейства* подмножеств некоторого множества. Предположим, что $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}[A]$, где A — некоторое множество. Пусть $I_{\mathfrak{P}_0}$ — тождественное отображение множества $\mathfrak{P}_0$ на себя.

Определение 2. *Объединением системы множеств* $\mathfrak{P}_0$ называют объединение тождественного семейства множеств $I_{\mathfrak{P}_0}$, соответствующего системе $\mathfrak{P}_0$.

До сих пор мы говорили об объединении семейства множеств лишь в том случае, когда все объединяемые множества содержатся в каком-нибудь одном множестве. Если A и B — любые два множества, то, как уже говорилось, существует множество C такое, что $A \subset C$ и $B \subset C$. Поэтому имеет смысл их объединение $A \cup B$. Разумеется, эти соображения годятся и в том случае, когда речь идет об объединении любого конечного семейства множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Отметим некоторые легко проверяемые свойства операции объединения.

1. Пусть $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{B_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — два семейства подмножеств множества A, причем $A_\xi \subset B_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. Тогда

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi.$$

2. $A_{\bar{\xi}} \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$, каковы бы ни были семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ подмножеств некоторого множества и индекс $\bar{\xi} \in \Xi$.

3. Пусть A и B — два множества. Равенство $A \cup B = A$ выполняется тогда и только тогда, когда $B \subset A$.

Если $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство подмножеств некоторого множества и $\Xi_0 \subset \Xi$, то символом $\bigcup_{\xi \in \Xi_0} A_\xi$ мы обозначим объединение сужения семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ на множество Ξ_0. Используя это обозначение, мы можем высказать еще одно свойство объединений:

4. $\bigcup_{\xi \in \Xi_0} A_\xi \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

5. (Ассоциативность объединения.)

Допустим, что множество Ξ совпадает с объединением семейства $\{\Xi_\eta\}$ $(\eta \in H)$ своих подмножеств и служит множеством индексов для некоторого семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ подмножеств некоторого множества. Пусть $B_\eta = \bigcup_{\xi \in \Xi_\eta} A_\xi$ $(\eta \in H)$. Тогда

$$\bigcup_{\eta \in H} B_\eta = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi.$$

Доказательство. Если $x \in \bigcup_{\eta \in H} B_\eta$, то существует индекс $\bar{\eta} \in H$ такой, что $x \in B_{\bar{\eta}} = \bigcup_{\xi \in \Xi_{\bar{\eta}}} A_\xi$; значит, существует индекс

$\bar{\xi} \in \Xi_{\bar{\eta}}$ такой, что $x \in A_{\bar{\xi}}$, а так как $\Xi_{\bar{\eta}} \subset \bigcup_{\eta \in H} \Xi_\eta = \Xi$ (см. свойство 2), то $\bar{\xi} \in \Xi$. Таким образом, $x \in \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$ и $\bigcup_{\eta \in H} B_\eta \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$. Если же $x \in \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$, то $x \in A_{\bar{\xi}}$ при некотором $\bar{\xi} \in \Xi$; но так как $\Xi = \bigcup_{\eta \in H} \Xi_\eta$, то $\bar{\xi} \in \Xi_{\bar{\eta}}$ при некотором $\bar{\eta} \in H$, так что $A_{\bar{\xi}} \subset \bigcup_{\xi \in \Xi_{\bar{\eta}}} A_\xi = B_{\bar{\eta}}$ (см. свойство 2). В свою очередь, $B_{\bar{\eta}} \subset \bigcup_{\eta \in H} B_\eta$, и потому $x \in \bigcup_{\eta \in H} B_\eta$. Значит, $\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset \bigcup_{\eta \in H} B_\eta$, и наше утверждение доказано.

Предположим теперь, что семейство подмножеств некоторого множества имеет множеством индексов множество $T \times U$ (произведение множеств T и U):

$$\{A_{(t, u)}\} \quad ((t, u) \in T \times U).$$

Если $\bar{u} \in U$, то положим $B_{\bar{u}} = \{(t, u) \in T \times U \colon u = \bar{u}\}$. Тогда, очевидно, $T \times U = \bigcup_{u \in U} B_u$.

Применяя эти обозначения, сформулируем еще одно свойство объединений.

6. $\bigcup_{(t, u) \in T \times U} A_{(t, u)} = \bigcup_{u \in U} \left(\bigcup_{(t, u) \in B_u} A_{(t, u)} \right)$.

В правой части этого равенства стоит объединение семейства множеств $\left\{ \bigcup_{(t, u) \in B_u} A_{(t, u)} \right\}$ $(u \in U)$.

Доказательство сразу следует из свойства 5.

Часто объединение $\bigcup_{(t, u) \in B_u} A_{(t, u)}$ обозначают так: $\bigcup_{t \in T} A_{(t, u)}$. В соответствии с этим можно записать:

$$\bigcup_{(t, u) \in T \times U} A_{(t, u)} = \bigcup_{u \in U} \left(\bigcup_{t \in T} A_{(t, u)} \right).$$

Легко понять, что верно также и равенство

$$\bigcup_{(t, u) \in T \times U} A_{(t, u)} = \bigcup_{t \in T} \left(\bigcup_{u \in U} A_{(t, u)} \right).$$

Отметим еще одно легко доказываемое свойство операции объединения множеств (это свойство естественно называть коммутативностью).

7. Пусть $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство подмножеств множества A и пусть φ — взаимнооднозначное отображение некоторого множества H на множество Ξ. Тогда

$$\bigcup_{\eta \in H} A_{\varphi(\eta)} = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi.$$

В левой части этого равенства стоит объединение семейства $\{A_{\varphi(\eta)}\}$ $(\eta \in H)$, представляющего собою сложное отображение, составленное из отображений φ и отображения (2).

Определение 3. Множество $\{x \in A\colon x \in A_\xi$ при любом $\xi \in \Xi\}$ называется *пересечением семейства множеств* (2) и обозначается так: $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$. Если $\Xi = \mathbf{N}$, то вместо $\bigcap\limits_{\xi \in \mathbf{N}} A_\xi$ часто пишут $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, а если $\Xi = \mathbf{N}_n$, $n \in \mathbf{N}$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, или $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \ldots \cap A_n$.

Исследование свойств пересечений во многом аналогично только что проведенному исследованию свойств объединений.

Легко проверить, что множество $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$ не зависит от объемлющего множества A (если Ξ не пусто).

1'. Пусть выполнены условия 1. Тогда

$$\bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset \bigcap_{\xi \in \Xi} B_\xi.$$

2'. $A_{\bar\xi} \supset \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$, каковы бы ни были семейство (2) и индекс $\bar\xi \in \Xi$.

3'. Пусть A и B — два множества. Равенство $A \cap B = A$ выполняется тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

4'. Пусть выполнены условия 4. Тогда $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi_0} A_\xi \supset \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

5'. Пусть $\Xi = \bigcup\limits_{\eta \in H} \Xi_\eta$. Положим $B_\eta = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi_\eta} A_\xi$ $(\eta \in H)$. Тогда $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi = \bigcap\limits_{\eta \in H} B_\eta$.

Предоставляем читателю сформулировать и доказать аналог свойств 6 и 7.

Следующее утверждение напоминает дистрибутивное свойство умножения чисел.

Предложение 1. Если $B \subset A$, то $B \cap \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} (B \cap A_\xi)$ и $B \cup \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} (B \cap A_\xi)$.

Доказательство. Докажем, например, первое из этих равенств. Если $x \in B \cap \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$, то $x \in B$ и существует индекс $\bar\xi \in \Xi$, такой, что $x \in A_{\bar\xi}$. Но тогда $x \in B \cap A_{\bar\xi}$, и потому $x \in \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} (B \cap A_\xi)$.

Пусть $x \in \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} (B \cap A_\xi)$. Тогда существует индекс $\bar\xi \in \Xi$, такой, что $x \in B \cap A_{\bar\xi}$, а тогда $x \in B$ и $x \in \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$, так что $x \in B \cap \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

Первое равенство доказано. Второе доказывается столь же просто.

Определение 4. Если A и B — два подмножества множества C, то множество $\{x \in C\colon x \in A,\ x \,\overline{\in}\, B\}$ называют *разностью множеств* A и B и обозначают так: $A \setminus B$.

Множество $C \setminus B$ называют *дополнением множества B относительно множества C* и обозначают символом B'. Конечно, B' зависит от объемлющего множества C, что не отражено в обозначении. Но обычно из контекста бывает понятно, относительно какого множества берется дополнение.

Читатель легко докажет, что $A \setminus B = A \cap B'$, где $C \supset A$, $C \supset B$ и что $(B')' = B$.

Предложение 2. Пусть $\{B_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство подмножеств множества C. Тогда

$$\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi\right)' = \bigcap_{\xi \in \Xi} B'_\xi$$

(имеется в виду дополнение относительно множества C).

Доказательство. $\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi\right)' = \left\{x \in C : x \overline{\in} \bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi\right\} = \{x \in C$: не существует индекса $\xi \in \Xi$, такого, что $x \in B_\xi\} = \{x \in B$: при всех $\xi \in \Xi$ $x \overline{\in} B_\xi\} = \{x \in C$: при всех $\xi \in \Xi$ $x \in B'_\xi\} = \bigcap_{\xi \in \Xi} B'_\xi$.

Замечание. Столь же легко можно доказать, что (в обозначениях предложения 2)

$$\left(\bigcap_{\xi \in \Xi} B_\xi\right)' = \bigcup_{\xi \in \Xi} B'_\xi.$$

Предложение 3. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность подмножеств некоторого множества E. Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{E}_n, \tag{3}$$

где $\hat{E}_1 = E_1$, $\hat{E}_n = E_n \setminus E_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Если к тому же последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает, т. е. если $E_n \subset E_{n+1}$ при всех $n \in \mathrm{N}$, то $\hat{E}_k \cap \hat{E}_l = \Lambda$ при $k \neq l$ $(k, l \in \mathrm{N})$.

Доказательство. Ясно, что $\hat{E}_n \subset E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и потому (свойство 1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{E}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Докажем, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{E}_n$. Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Рассмотрим множество

$$\{n \in \mathrm{N} : x \in E_n\} = K_x.$$

Это множество не пусто и состоит из натуральных чисел. Значит, имеется натуральное число n_x, такое, что $x \in E_{n_x}$ и $n_x \leqslant n$ при всех $n \in K_x$. Если $n_x = 1$, то $x \in E_1$, т. е. $x \in \hat{E}_1$, и тем более $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{E}_n$. Если $n_x > 1$, то $x \in E_{n_x}$ и $x \overline{\in} E_{n_x - 1}$, так что $x \in E_{n_x} \setminus E_{n_x - 1} = \hat{E}_{n_x}$; поэтому во всех случаях $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{E}_n$, и (3) доказано.

Остается проверить, что если $E_n \subset E_{n+1}$ при всех n ($n \in \mathbf{N}$), то $\hat{E}_k \cap \hat{E}_l = \Lambda$ при $k \neq l$ ($k, l = 1, 2, \ldots$). Пусть $k < l$ и $x \in \hat{E}_k$. Тогда $x \in E_k$, а так как $k \leqslant l-1$, то $E_k \subset E_{l-1}$ и $x \in E_{l-1}$. Но в этом случае $x \overline{\in} \hat{E}_l$. Наше предложение доказано полностью.

7. В этом пункте мы коротко остановимся на классификации множеств по богатству запаса их элементов. В основе этой классификации лежит следующее определение.

Определение 1. Если существует взаимнооднозначное отображение множества A на множество B, то говорят, что *множество A равномощно множеству B.*

Предложение 1. 1. Всякое множество равномощно самому себе.

2. Если множество A равномощно множеству B, то и множество B равномощно множеству A.

3. Если множество A равномощно множеству B, а множество B равномощно множеству C, то множество A равномощно множеству C.

Доказательство. 1. Тождественное отображение I_A (см. п. 3) множества A на себя, очевидно, взаимнооднозначно.

2. Если φ — взаимнооднозначное отображение множества A на множество B, то ясно, что φ^{-1} (см. п. 3) — взаимнооднозначное отображение множества B на множество A.

3. Если φ — взаимнооднозначное отображение множества A на множество B, а ψ — взаимнооднозначное отображение множества B на множество C, то суперпозиция $\psi \circ \varphi$ (см. п. 3), как нетрудно видеть, — взаимнооднозначное отображение множества A на множество C.

Доказательство закончено.

Определение 2. Множество A называется *конечным*, если существует такое натуральное число n_0, что множество A равномощно множеству $\mathbf{N}_{n_0}$. В этом случае натуральное число n_0 называют *числом элементов множества* A. (Можно доказать, что число n_0 не зависит от конкретного отображения, взаимнооднозначно отображающего множество A на множество $\mathbf{N}_{n_0}$.) Непустое множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Множество, равномощное множеству $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, называется *счетным*. Конечные и счетные множества объединяют под общим названием *не более чем счетных*.

Тривиальным примером счетного множества служит множество $\mathbf{N}$ (см. утверждение 1 предл. 1).

Другие, более интересные примеры будут приведены позднее.

Предложение 2. Произведение двух счетных множеств счетно.

Доказательство. Докажем сначала, что множество $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ счетно. Для этого рассмотрим отображение φ множества $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ в множество $\mathbf{N}$, заданное следующим образом:

$$\varphi((p,\ q))=2^{p-1}(2q-1)\quad ((p,\ q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}).$$

Легко понять, что φ — взаимнооднозначное отображение. В самом деле, если $2^{p_1-1}(2q_1-1)=2^{p_2-1}(2q_2-1)$, то число p_1 не может быть меньше числа p_2, так как в противном случае оказалось бы, что четное число $2^{p_2-p_1}(2q_2-1)$ равно нечетному числу $(2q_1-1)$. По той же причине и число p_2 не меньше числа p_1, так что $p_2=p_1$. Но в таком случае $2q_1-1=2q_2-1$ и $q_1=q_2$.

Справедливо равенство $\varphi[\mathbf{N}\times\mathbf{N}]=\mathbf{N}$, так что φ отображает множество $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ *на* $\mathbf{N}$. В самом деле, пусть $n\in\mathbf{N}$ и пусть $p-1$ — показатель степени, с которой число 2 входит в разложение числа n на простые сомножители ($p\geqslant 1$). Тогда число $\frac{n}{2^{p-1}}$, очевидно, нечетное, и потому при некотором $q\in\mathbf{N}$ $n=2^{p-1}(2q-1)=\varphi((p,\ q))$.

Итак, множество $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ счетно.

Предположим теперь, что A и B — счетные множества, так что существуют отображения φ и ψ, из которых первое взаимнооднозначно отображает множество A на множество $\mathbf{N}$, а второе — множество B на множество $\mathbf{N}$. Рассмотрим отображение f, заданное на произведении $A\times B$ равенством

$$f((x,\ y))=(\varphi(x),\ \psi(y))\quad ((x,\ y)\in A\times B).$$

Легко проверить, что f — взаимнооднозначное отображение множества $A\times B$ на множество $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, и потому эти два множества равномощны. Но, по доказанному, множество $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ счетно. Значит, согласно утверждению 3 предл. 1, счетно и множество $A\times B$.

Предложение доказано.

Предложение 3. Всякое непустое подмножество множества $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел не более чем счетно.

Это предложение можно сформулировать и иначе: всякое бесконечное подмножество множества $\mathbf{N}$ счетно. Идея доказательства очень проста: если A — бесконечное множество натуральных чисел, то наименьшему из них присвоим номер 1, обозначив его символом p_1; наименьшему из чисел, входящих в A и отличных от p_1, присвоим номер 2, обозначив его символом p_2. Рассуждая и далее таким образом, мы „занумеруем" все числа множества A, чем и будет доказана счетность этого множества.

Однако осуществить эту идею не столь просто.

Доказательство. Сначала отметим следующее простое свойство натуральных чисел: пусть φ — строго монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел; тогда $\varphi(k)\geqslant k$ при всех $k\in\mathbf{N}$. В самом деле, если $k=1$, то это утверждение тривиально. Если оно справедливо при каком-нибудь k, то ввиду того, что $\varphi(k+1)>\varphi(k)\geqslant k$, имеем $\varphi(k+1)\geqslant k+1$. Значит, согласно принципу математической индукции, $\varphi(k)\geqslant k$ при всех $k\in\mathbf{N}$. Пусть теперь A — бесконечное множество натуральных чисел. Рассмотрим множество X, состоящее из всех натуральных чисел k, обладающих следующим свойством: существует такое отображение φ_k множества $\mathbf{N}_k=\{n\in\mathbf{N}:n\leqslant k\}$ в множество A, что

1) $\varphi_k(i)<\varphi_k(i+1)$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$,

2) если $n\in A$ и $n\leqslant\varphi_k(k)$, то $n=\varphi_k(i)$ при некотором $i\in\mathbf{N}_k$.

Ближайшая наша цель состоит в доказательстве равенства $X=\mathbf{N}$. Для достижения этой цели достаточно проверить, что, во-первых, $1\in X$ и что, во-вторых, из включения $k\in X$ следует, что $k+1\in X$.

Множество A, будучи не пустым, содержит наименьший элемент. Обозначим его через p_1 и положим $\varphi_1(1)=p_1$. Рассмотрение отображения φ_1 одноэлементного множества $\{1\}$ в множество A убеждает нас в том, что $1\in X$.

Предположим теперь, что $k\in X$. Обозначим через p_{k+1} наименьшее из натуральных чисел, содержащихся в A, и бо́льших, чем $\varphi_k(k)$ (такие имеются, ибо A — бесконечное множество). Теперь рассмотрим отображение φ_{k+1} множества $\mathbf{N}_{k+1}$ в множество A такое, что $\varphi_{k+1}\supset\varphi_k$ (см. п. 3) и $\varphi_{k+1}(k+1)=p_{k+1}$. Проверим, что это отображение обладает свойствами 1) и 2) (с заменой k на $k+1$).

1) Если $i\in\mathbf{N}_{k+1}$ и $i<k$, то $i+1\in\mathbf{N}_k$ и $\varphi_{k+1}(i)=\varphi_k(i)<\varphi_k(i+1)=\varphi_{k+1}(i+1)$. Если же $i=k$, то $\varphi_{k+1}(i)=\varphi_k(k)<p_{k+1}=\varphi_{k+1}(k+1)=\varphi_{k+1}(i+1)$.

2) Пусть $n\in A$ и $n\leqslant\varphi_{k+1}(k+1)$. Если $n=\varphi_{k+1}(k+1)$, то доказывать нечего. Если $n<\varphi_{k+1}(k+1)$, то $n\leqslant\varphi_k(k)$, ибо в противном случае оказалось бы, что $\varphi_k(k)<n<p_{k+1}=\varphi_{k+1}(k+1)$, а это противоречит определению числа p_{k+1}. Но раз $n\leqslant\varphi_k(k)$, а $k\in X$, то $n=\varphi_k(i)$ при некотором $i=\mathbf{N}_k$, а потому $n=\varphi_{k+1}(i)$. Итак, $X=\mathbf{N}$.

Рассмотрим построенную нами по индукции последовательность отображений $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Взяв произвольное число $k\in\mathbf{N}\,(=X)$, положим $\varphi(k)=\varphi_k(k)$.

Проверим, что φ — взаимнооднозначное отображение множества $\mathbf{N}$ на множество A (и тем самым завершим доказательство). Во-первых, $\varphi(k)=$ $=\varphi_k(k)<\varphi_{k+1}(k+1)=\varphi(k+1)$. Отсюда, рассуждая по индукции, легко вывести, что $\varphi(k')<\varphi(k'')$, если $k', k''\in\mathbf{N}$ и $k'<k''$. Поэтому отображение φ взаимнооднозначно. Осталось убедиться в том, что $\varphi[\mathbf{N}]=A$.

Пусть $n\in A$. В силу замечания, сделанного в начале доказательства, $n\leqslant\varphi(n)=\varphi_n(n)$. Теперь воспользуемся свойством 2) отображения φ_k при $k=n$ и найдем число $i\in\mathbf{N}_n$, такое, что $\varphi_n(i)=n$. Но ведь $\varphi_n(i)=\varphi_i(i)=\varphi(i)$, так что $\varphi(i)=n$.

Предложение доказано.

Следствие 1. *Любое подмножество не более чем счетного множества не более чем счетно.*

Доказательство. Если A — не более чем счетное множество, B — его подмножество, то пусть φ — взаимнооднозначное отображение множества A на множество N (если A счетно) или на множество $\mathbf{N}_n$ (если A конечно и состоит из n элементов). Тогда сужение φ_B' отображения φ на множество B представляет собою взаимнооднозначное отображение множества B на множество $\varphi[B]\subset\mathbf{N}$, которое, согласно только что доказанному предложению, не более чем счетно.

Следствие 2. *Образ не более чем счетного множества при любом отображении — снова не более чем счетное множество.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это утверждение только для множества $A=\mathbf{N}$ или $A=\mathbf{N}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть φ — отображение одного из этих множеств в некоторое множество Y. Для любого $y\in\varphi[A]$ рассмотрим множество $\varphi^{-1}[\{y\}]$ и обозначим через $\psi(y)$ наименьшее из чисел, содержащихся в $\varphi^{-1}[\{y\}]$. Отображение ψ взаимно-однозначно: если $y'\neq y''$, $y', y''\in\varphi[A]$, то $\varphi^{-1}[\{y'\}]\cap\varphi^{-1}[\{y''\}]=\Lambda$, так что $\psi(y')\neq\psi(y'')$. Вместе с тем множество $\psi[\varphi[A]]$, будучи частью множества $\mathbf{N}$, не более, чем счетно. Следствие доказано.

Следствие 3. *Если* Ξ_1 *— конечное, а* Ξ_2 *— счетное множество, то множество* $\Xi_1\times\Xi_2$ *счетно.*

Доказательство. Очевидно (ср. с доказательством предложения 2), достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда $\Xi_1=\mathbf{N}_k$ при некотором $k\in\mathbf{N}$, а $\Xi_2=\mathbf{N}$. Ясно, что $\mathbf{N}_k\times\mathbf{N}\subset\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, так что множество $\mathbf{N}_k\times\mathbf{N}$ не более, чем счетно (согласно предложениям 2 и 3). Вместе с тем оно, очевидно, бесконечно. Значит, оно счетно.

Определение 3. Условимся называть семейство множеств $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ счетным (конечным, не более, чем счетным), если его множество индексов Ξ счетно (соответственно конечно, не более, чем счетно).

Предложение 4. Объединение не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств — снова не более чем счетное множество.

Доказательство. Рассмотрим сначала произведение $\Xi\times\mathbf{N}$. Если множество Ξ счетно, то это произведение тоже счетно (предложение 2). Если же множество Ξ конечно, то множество $\Xi\times\mathbf{N}$ счетно по следствию 3 к предложению 3.

Поскольку каждое из множеств A_ξ не более, чем счетно, то при любом $\xi\in\Xi$ существует взаимнооднозначное отображение φ_ξ множества $\mathbf{N}$ (или $\mathbf{N}_{n_\xi}$ при некотором $n_\xi\in\mathbf{N}$) на A_ξ.

Рассмотрим теперь подмножество X произведения $\Xi\times\mathbf{N}$, состоящее из всех упорядоченных пар (ξ, n), где $\xi\in\Xi$, а $n\in\mathbf{N}_{n_\xi}$, если A_ξ конечно, и n—любое натуральное число, если множество A_ξ бесконечно. Согласно следствию 1 к предложению 3, множество X не более, чем счетно. Введем теперь отображение φ множества X в множество $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}A_\xi$, заданное следующим образом:

$$\varphi((\xi, n))=\varphi_\xi(n)\quad((\xi, n)\in X).$$

Легко понять, что $\varphi[X]=\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}A_\xi$, и множество $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}A_\xi$ не более, чем счетно, как образ не более, чем счетного множества.

Предложение 5. Множество всех рациональных чисел счетно.

Доказательство. Множество R_+ всех положительных рациональных чисел равно образу счетного множества $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$

при отображении, которое паре $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ставит в соответствие рациональное число $\frac{p}{q}$, и потому не более, чем счетно (предложение 3, следствие 2). Множество R_- всех отрицательных чисел, очевидно, равномощно множеству всех положительных рациональных чисел, а множество всех рациональных чисел равно объединению трех множеств: R_+, R_- и $\{0\}$. Согласно предложению 4, оно не более чем счетно, а так как оно бесконечно, то оно счетно.

Предложение доказано.

Важно отдавать себе отчет в том, что не всякое бесконечное множество счетно. Так, например, множество R несчетно, так же, как и любой промежуток $[a, b]$, (a, b) или $[a, b)$ при $a < b$.

Предоставляя читателю доказать, что любые два непустые промежутка вещественной прямой равномощны, ограничимся лишь доказательством следующего предложения.

Предложение 6. Промежуток $[0, 1]$ несчетен (т. е. не есть счетное множество).

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует взаимнооднозначное отображение φ множества $\mathbf{N}$ на отрезок $[0, 1]$. Рассмотрим промежутки $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Пусть Δ_1 — тот из них, который не содержит числа $\varphi(1)$. Предположим, что $k \in \mathbf{N}$ и что $\{\Delta_n\}$ $(n \in \mathbf{N}_k)$ — семейство промежутков, обладающее следующими свойствами:

1) Δ_n — замкнутый промежуток (п. 2, пример 1) при любом $n \in \mathbf{N}_k$;

2) $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}_{k-1})$;

3) $\varphi(n) \overline{\in} \Delta_n$ $(n \in \mathbf{N}_k)$.

Пусть $\Delta_k = [\alpha_k, \beta_k]$. Рассмотрим три промежутка

$$\left[\alpha_k, \alpha_k + \frac{\beta_k - \alpha_k}{3}\right], \left[\alpha_k + \frac{\beta_k - \alpha_k}{3}, \alpha_k + \frac{2(\beta_k - \alpha_k)}{3}\right],$$
$$\left[\alpha_k + \frac{2(\beta_k - \alpha_k)}{3}, \beta_k\right]. \tag{4}$$

Хотя бы один из промежутков (4) не содержит числа $\varphi(k+1)$. Обозначим его символом Δ_{k+1}. Тогда семейство $\{\Delta_n\}$ $(n \in \mathbf{N}_{k+1})$ обладает свойствами 1), 2), 3), только k нужно заменить на $k+1$.

Таким образом, применяя метод математической индукции (ср. с доказательством предложения 3), заключаем, что существует последовательность замкнутых промежутков $\{\Delta_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ такая, что $\varphi(n) \overline{\in} \Delta_n$, $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$ и $\Delta_n \subset [0, 1]$ при всех натуральных n. Согласно известному свойству множества вещественных чисел, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \Lambda$. Пусть $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Число c, очевидно, содержится в промежутке $[0, 1]$. Вспомним, что φ отображает множество $\mathbf{N}$ *на* промежуток $[0, 1]$. Поэтому существует номер $n_0 \in \mathbf{N}$, такой, что $c = \varphi(n_0)$. Но в таком случае $c \overline{\in} \Delta_{n_0}$ и тем более $c \overline{\in} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$.

Мы получили противоречие. Предложение доказано.

ДОБАВЛЕНИЕ 2

СУММИРУЕМЫЕ ЧИСЛОВЫЕ СЕМЕЙСТВА

Теория суммируемых семейств, излагаемая в этом добавлении, представляет собой простое обобщение хорошо известной читателю теории абсолютно сходящихся числовых рядов. Доказательства теорем будут производиться в соответствии с идеями теории рядов, и в конце концов окажется, что в некотором смысле изучение всякого суммируемого семейства сводится к изучению абсолютно сходящегося ряда. Однако в теории интеграла (см. гл. II) очень часто приходится иметь дело с числовыми семействами, для которых индексами служат элементы довольно разнообразной природы (например, элементы разбиения или точки множества R^{ν} с целыми координатами). Было бы очень неудобно каждый раз производить упомянутое выше сведе́ние к теории рядов.

Мы считаем известным понятие суммы *конечного* семейства вещественных (конечных или нет) или комплексных чисел. Напомним, что если $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — такое семейство, то его сумма обозначается так: $\sum\limits_{\xi \in \Xi} a_\xi$ или $\sum\limits_{\Xi} a_\xi$. Если $\Xi = N_n$ $(n \in N)$, то применяют и такое обозначение: $\sum\limits_{\xi=1}^{n} a_\xi$, или $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Если $\widetilde{\Xi} \subset \Xi$, то символом $\sum\limits_{\xi \in \widetilde{\Xi}} a_\xi$ обозначается сумма подсемейства, отвечающего множеству $\widetilde{\Xi}$.

Если все числа a_ξ комплексные или конечные вещественные, то символ $\sum\limits_{\Xi} a_\xi$ всегда имеет смысл. Если известно лишь, что $a_\xi \in \overline{R}$ $(\xi \in \Xi)$, то этот символ может и не иметь смысла (см. д. 1, п. 1).

Нам неоднократно придется применять сочетательный и перестановочный законы сложения. Напомним их.

1. Если Ξ — конечное множество, $\Xi = \bigcup_{\eta \in H} \Xi_\eta$, где $\{\Xi_\eta\}$ $(\eta \in H)$ — конечное семейство подмножеств множества Ξ, причем $\Xi_{\eta'} \cap \Xi_{\eta''} = \Lambda$ $(\eta' \neq \eta'')$, а сумма $\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi$ имеет смысл, то имеют смысл все суммы $\sum_{\xi \in \Xi_\eta} a_\xi$ $(\eta \in H)$ и $\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi = \sum_{\eta \in H} \sum_{\xi \in \Xi_\eta} a_\xi$.

2. Если сумма $\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi$ имеет смысл, а φ — взаимнооднозначное отображение множества H на множество Ξ, то и сумма $\sum_{\eta \in H} a_{\varphi(\eta)}$ имеет смысл и

$$\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi = \sum_{\eta \in H} a_{\varphi(\eta)}.$$

Условимся в этом добавлении обозначать символом $\mathfrak{P}_{\text{fin}}[A]$ множество всех конечных подмножеств множества A.

1. Определение 1. Пусть

$$\{a_\xi\} \quad (\xi \in \Xi) \tag{1}$$

— счетное семейство конечных вещественных или комплексных чисел. Число l, конечное, вещественное или комплексное, называется *суммой семейства* $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, если для любого положительного числа ε найдется конечное множество $\Xi_\varepsilon \subset \Xi$ такое, что, каково бы ни было конечное множество $\widetilde{\Xi}$, удовлетворяющее условиям: $\widetilde{\Xi} \subset \Xi$, $\Xi_\varepsilon \subset \widetilde{\Xi}$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}} a_\xi - l \right| \leqslant \varepsilon.$$

Если такое (конечное) число l существует, то семейство $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ называется суммируемым.

Можно было бы высказать это определение, не предполагая счетности множества Ξ. Если множество Ξ конечно, то мы пришли бы к уже известному понятию суммы конечного семейства чисел (в самом деле, в качестве l нужно взять обычную сумму; тогда при любом $\varepsilon > 0$ роль множества Ξ_ε играет просто все множество Ξ); с другой стороны, допустив, что множество Ξ бесконечно и несчетно, можно было бы доказать, что если существует число l со свойствами, описанными в определении, то множество $\{\xi \in \Xi : a_\xi \neq 0\}$ не более чем счетно. Кроме того, в приложениях нам придется иметь дело только с не более, чем счетными семействами вещественных чисел. По всем этим причинам мы и высказали определение суммы лишь для счетных числовых семейств.

Замечание 1. Если (1) — семейство комплексных чисел, то оно суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемы два семейства вещественных чисел

$$\{\operatorname{Re} a_\xi\} \quad (\xi \in \Xi), \tag{2}$$

$$\{\operatorname{Im} a_\xi\} \quad (\xi \in \Xi), \tag{3}$$

и если выполнено это условие, то

$$\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi = \sum_{\xi\in\Xi} \operatorname{Re} a_\xi + i \sum_{\xi\in\Xi} \operatorname{Im} a_\xi. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Xi}$ — какое-нибудь конечное семейство индексов, а l — какое-нибудь комплексное число, $l = l_1 + il_2$ (l_1, $l_2 \in R$). Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}} \operatorname{Re} a_\xi - l_1\right| \\ \left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}} \operatorname{Im} a_\xi - l_2\right| \end{array}\right\} \leqslant \left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} \operatorname{Re} a_\xi - l_1\right| + \left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} \operatorname{Im} a_\xi - l_2\right|. \tag{5}$$

Если семейство (1) суммируемо, а l — его сумма, то для любого положительного числа ε можно подобрать такое множество $\widetilde{\Xi}_\varepsilon \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$, что $\left|\sum\limits_{\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \varepsilon$ при всех $\widetilde{\Xi}$ $\left(\widetilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi],\ \widetilde{\Xi} \supset \Xi_\varepsilon\right)$. Из неравенства (5) следует, что при тех же условиях

$$\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} \operatorname{Re} a_\xi - l_1\right| \leqslant \varepsilon, \quad \left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} \operatorname{Im} a_\xi - l_2\right| \leqslant \varepsilon.$$

Значит, семейства (2) и (3) суммируемы и выполнено (4).

Предположим теперь, что семейства (2) и (3) суммируемы, и пусть $l_1 = \sum\limits_{\xi\in\Xi} \operatorname{Re} a_\xi$, $l_2 = \sum\limits_{\xi\in\Xi} \operatorname{Im} a_\xi$. Найдем два конечных множества индексов $\Xi^1_{\frac{\varepsilon}{2}}$ и $\Xi^2_{\frac{\varepsilon}{2}}$ таких, что $\left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}^{(1)}} \operatorname{Re} a_\xi - l_1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $\widetilde{\Xi}^1$ $\left(\widetilde{\Xi}^1 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]\right)$, содержащего $\widetilde{\Xi}^1_{\frac{\varepsilon}{2}}$, и $\left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}^2} \operatorname{Im} a_\xi - l_2\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $\widetilde{\Xi}^2$ $(\widetilde{\Xi}^2 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi])$, содержащего $\widetilde{\Xi}^2_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Если $\widetilde{\Xi} \supset \Xi^1_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup \Xi^2_{\frac{\varepsilon}{2}}$ и $\widetilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$, то из неравенства (5) следует, что $\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}}' a_\xi - l\right| \leqslant \varepsilon$, так что число $l = l_1 + il_2$ оказывается суммой семейства (1).

Замечание доказано.

Определение 2. Пусть $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — счетное семейство вещественных (не обязательно конечных) чисел. Будем говорить, что сумма этого семейства равна $+\infty$ (или $-\infty$), если для любого (конечного) вещественного числа l существует конечное множество Ξ_l, содержащееся в множестве Ξ, и такое, что каково бы ни было конечное множество индексов $\widetilde{\Xi}$, удовлетворяющее условию $\widetilde{\Xi}\supset\Xi_l$, сумма $\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi$ имеет смысл и выполняется неравенство $\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi > l$ $\left(\text{или, соответственно, } \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi < l\right)$.

Говорят, что семейство $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ имеет сумму, если оно суммируемо или если его сумма равна $+\infty$ или $-\infty$.

Предложение 1. Если семейство вещественных чисел $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ имеет сумму, то все члены a_ξ этого семейства такие, что $|a_\xi| = +\infty$ имеют один и тот же знак (совпадающий со знаком суммы), т. е. либо все положительны, либо все отрицательны.

Доказательство. Если наше семейство суммируемо, то бесконечных членов нет по определению. Пусть

$$\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi = +\infty. \tag{6}$$

Докажем, что тогда $a_\xi \neq -\infty$ при всех $\xi\in\Xi$. Допустим противное: $a_{\xi_0} = -\infty$ при некотором $\xi_0\in\Xi$. Из равенства (6) следует, что существует конечное множество Ξ_0 такое, что $\Xi_0\subset\Xi$, и для *всех* конечных множеств индексов $\widetilde{\Xi}$, содержащих Ξ_0, сумма $\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}}' a_\xi$ имеет смысл и выполняется неравенство $\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi > 0$.

Присоединим к множеству Ξ_0 индекс ξ_0, точнее, рассмотрим множество $\widetilde{\Xi} = \Xi_0 \cup \{\xi_0\}$.

Это множество конечно и содержит Ξ_0. Однако если сумма конечного семейства вещественных чисел, среди членов которого находится $-\infty$, имеет смысл, то она равна $-\infty$, и потому $\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}}' a_\xi < 0$.

Если $\sum\limits_{\xi\in\Xi} a_\xi = -\infty$, то совершенно тем же способом мы докажем, что $a_\xi \neq +\infty$ при всех $\xi \in \Xi$.

Предложение доказано.

Следующее предложение показывает, что суммируемые семейства обладают свойством линейности.

Предложение 2. Пусть $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{b_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — два суммируемых числовых семейства и пусть λ — комплексное число. Тогда

1) семейство $\{a_\xi + b_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ суммируемо и

$$\sum_{\xi\in\Xi} (a_\xi + b_\xi) = \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi + \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi;$$

2) семейство $\{\lambda a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ суммируемо и

$$\sum_{\xi\in\Xi} \lambda a_\xi = \lambda \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Взяв число $\varepsilon > 0$, найдем конечные множества индексов Ξ'_ε и Ξ''_ε, такие, что

$$\left| \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}'} a_\xi - \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}''} b_\xi - \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

каковы бы ни были конечные множества индексов $\widetilde{\Xi}'$, $\widetilde{\Xi}''$ такие, что $\widetilde{\Xi}' \supset \Xi'_\varepsilon$ и $\widetilde{\Xi}'' \supset \Xi''_\varepsilon$. Положим $\Xi_\varepsilon = \Xi'_\varepsilon \cup \Xi''_\varepsilon$. Если $\widetilde{\Xi}$ — конечное множество индексов, содержащее Ξ_ε, то оно содержит оба множества Ξ'_ε, Ξ''_ε. Стало быть,

$$\left| \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} (a_\xi + b_\xi) - \left(\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi + \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \right) \right| \leqslant \left| \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi \right| +$$
$$+ \left| \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} b_\xi - \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает конечное множество индексов Ξ_ε такое, что

$$\left| \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} (a_\xi + b_\xi) - \left(\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi + \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \right) \right| \leqslant \varepsilon,$$

каково бы ни было конечное множество индексов $\widetilde{\Xi}$, объемлющее Ξ_ε. Но в этом и состоит первое утверждение.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Предложение доказано.

Предложение 3. Допустим, что $\{\Xi_\eta\}$ $(\eta \in H)$ — конечное семейство подмножеств множества Ξ, такое, что

$$\Xi = \bigcup_{\eta \in H} \Xi_\eta, \quad \Xi_{\eta'} \cap \Xi_{\eta''} = \Lambda, \quad \text{если } \eta' \neq \eta''.$$

Если подсемейство $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_\eta)$ семейства (1) суммируемо при любом $\eta \in H$*, то и семейство (1) суммируемо и

$$\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi = \sum_{\eta \in H} \left(\sum_{\xi \in \Xi_\eta} a_\xi \right).$$

Доказательство. Положим $l_\eta = \sum_{\xi \in \Xi_\eta} a_\xi$ $(\eta \in H)$. Пусть ε — какое-нибудь положительное число и пусть p — число элементов множества H. При любом $\eta \in H$ существует конечное множество Ξ'_η, такое, что

$$\Xi'_\eta \subset \Xi_\eta, \quad \left| \sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}} a_\xi - l_\eta \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{p},$$

каково бы ни было конечное множество индексов $\widetilde{\Xi} \subset \Xi_\eta$, содержащее множество Ξ'_η.

Положим $\Xi' = \bigcup_{\eta \in H} \Xi'_\eta$. Множество Ξ', очевидно, конечно. Ясно, что $\sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}} a_\xi = \sum_{\eta \in H} \sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}_\eta}$ для любых конечных множеств индексов $\widetilde{\Xi}_\eta$, таких, что $\widetilde{\Xi}_{\eta'} \cap \widetilde{\Xi}_{\eta''} = \Lambda$, если $\eta' \neq \eta''$ и $\widetilde{\Xi} = \bigcup_{\eta \in H} \widetilde{\Xi}_\eta$ (в силу ассоциативности сумм конечных семейств). Поэтому

$$\left| \sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}} a_\xi - \sum_{\eta \in H} l_\eta \right| = \left| \sum_{\eta \in H} \sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}_\eta} a_\xi - \sum_{\eta \in H} l_\eta \right| =$$

$$= \left| \sum_{\eta \in H} \left(\sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}_\eta} a_\xi - l_\eta \right) \right| \leqslant \sum_{\eta \in H} \left| \sum_{\xi \in \widetilde{\Xi}_\eta} a_\xi - l_\eta \right| \leqslant p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

$$\left(\Xi'_\eta \subset \widetilde{\Xi}_\eta \subset \Xi_\eta, \quad \widetilde{\Xi} = \bigcup_{\eta \in H} \widetilde{\Xi}_\eta \right),$$

каково бы ни было конечное множество индексов $\widetilde{\Xi}$ $\left(\widetilde{\Xi} \subset \Xi\right)$, содержащее множество Ξ'.

---

* Всюду ниже мы считаем, что если $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — какое-нибудь числовое семейство, то $\sum_{\xi \in \Lambda} a_\xi = 0$.

Итак, число $\sum\limits_{\eta\in H} l_\eta$ обладает свойством, описанным в определении 1. Значит, оно и есть сумма семейства (1), и предложение доказано.

2. Сейчас мы укажем необходимое и достаточное условие суммируемости числового семейства. Его редко применяют для установления суммируемости конкретных семейств, но оно часто бывает полезным при доказательстве теорем о суммируемых семействах.

Предложение 1. Числовое семейство (1) суммируемо тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует конечное множество индексов Ξ^ε ($\Xi^\varepsilon \subset \Xi$), такое, что $\left|\sum\limits_{\xi\in\Xi^*} a_\xi\right| \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было конечное множество индексов Ξ^* ($\Xi^* \subset \Xi$), не пересекающееся с Ξ^ε.

Доказательство. Необходимость. В соответствии с определением суммируемого числового семейства найдем конечное множество индексов $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$, такое, что $\left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при любом конечном множестве индексов $\widetilde{\Xi}$ $\left(\widetilde{\Xi} \subset \Xi\right)$, содержащем $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Проверим, что в качестве множества Ξ^ε, о котором идет речь в формулировке этого предложения, можно взять множество $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$. В самом деле, предположим, что Ξ^* — конечное множество индексов, не пересекающееся с множеством $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Тогда, полагая $\Xi' = \Xi_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup \Xi^*$, имеем

$$\left|\sum_{\xi\in\Xi^*} a_\xi\right| = \left|\sum_{\xi\in\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}\cup\Xi^*} a_\xi - \sum_{\xi\in\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}} a_\xi\right| =$$

$$= \left|\left(\sum_{\xi\in\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}\cup\Xi^*} a_\xi - l\right) - \left(\sum_{\xi\in\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}} a_\xi - l\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{\xi\in\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}\cup\Xi^*} a_\xi - l\right| + \left|\sum_{\xi\in\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}} a_\xi - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\Xi^{1/n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ — такое конечное множество индексов, что если $\widetilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$, $\widetilde{\Xi} \cap \Xi^{1/n} = \Lambda$, то $\left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi\right| \leqslant \frac{1}{n}$. Положим $T_n = \Xi^1 \cup \Xi^{1/2} \cup \ldots \cup \Xi^{1/n}$. Тогда числовая последовательность $\left\{\sum_{\xi\in T_n} a_\xi\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в себе. Действительно, если $m > n$, то $\left|\sum_{\xi\in T_m} a_\xi - \sum_{\xi\in T_n} a_\xi\right| = \left|\sum_{\xi\in T_m\setminus T_n} a_\xi\right| \leqslant \frac{1}{n}$, так как $(T_m\setminus T_n)\cap\Xi^{1/n} = \Lambda$. Значит, существует число l (конечное вещественное или комплексное) такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\xi\in T_n} a_\xi = l.$$

Пусть теперь ε — какое-нибудь положительное число. Мы сейчас укажем конечное множество индексов Ξ_ε такое, что

$$\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

каково бы ни было конечное множество индексов $\widetilde{\Xi}$ такое, что $\widetilde{\Xi}\supset\Xi_\varepsilon$, $\widetilde{\Xi}\subset\Xi$. В качестве множества Ξ_ε можно взять множество T_n, где номер n подчинен следующим двум условиям:

$$\left|\sum_{\xi\in T_n} a_\xi - l\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{n}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Действительно, если $\widetilde{\Xi}\supset T_n$, $\widetilde{\Xi}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}\,[\Xi]$, то

$$\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \left|\sum_{\xi\in T_n} a_\xi - l\right| + \left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}\setminus T_n} a_\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}\setminus T_n} a_\xi\right|.$$

Но ведь множество $\widetilde{\Xi}\setminus T_n$ конечно и не пересекается с множеством $\Xi^{1/n}$, так что $\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}\setminus T_n} a_\xi\right| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и выполняется неравенство (7).

Итак, l — сумма семейства (1), которое, стало быть, суммируемо.

Следствие 1. *Если числовое семейство суммируемо, то и любое его подсемейство суммируемо.*

Доказательство. Пусть $\Theta\subset\Xi$ и пусть семейство (1) суммируемо. Взяв число $\varepsilon > 0$, найдем множество Ξ^ε, о котором говорилось в формулировке предложения. Положим $\Theta^\varepsilon = \Xi^\varepsilon\cap\Theta$. Если $\widetilde{\Theta}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}\,[\Theta]$, $\widetilde{\Theta}\cap\Theta^\varepsilon = \Lambda$, то $\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Theta}} a_\xi\right| \leqslant \varepsilon$, так как $\widetilde{\Theta}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}\,[\Xi]$, $\widetilde{\Theta}\cap\Xi^\varepsilon = \Lambda$. Следовательно, семейство $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Theta)$ удовлетворяет условию предложения. Значит, оно суммируемо.

Следствие 2. *Семейство* (1) *суммируемо, если суммируемо семейство* $\{|a_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi)$. *Иначе говоря, семейство суммируемо, если оно абсолютно суммируемо.*

Доказательство сразу же следует из предложения и из неравенства

$$\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi\right| \leqslant \sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} |a_\xi|,$$

верного при любом $\widetilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$.

Впоследствии мы увидим, что верно утверждение, обратное следствию 2. А пока мы докажем его лишь для семейств вещественных чисел.

Предложение 2. Если семейство (1) вещественных чисел суммируемо, то оно и абсолютно суммируемо.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\Xi_+ = \{\xi \in \Xi : a_\xi \geqslant 0\},\quad \Xi_- = \{\xi \in \Xi : a_\xi < 0\}.$$

Понятно, что $\Xi_+ \cup \Xi_- = \Xi$, $\Xi_+ \cap \Xi_- = \Lambda$. Семейства $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_+)$ и $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_-)$ суммируемы согласно следствию 1 к предложению. Применяя предложение 2 п. 1, видим, что семейство $\{-a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_-)$ тоже суммируемо. Замечая, что $a_\xi = |a_\xi|$, если $\xi \in \Xi_+$, и $-a_\xi = |a_\xi|$, если $\xi \in \Xi_-$, убеждаемся в том, что суммируемы семейства $\{|a_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi_+)$ и $\{|a_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi_-)$. Применяя предложение 3 п. 1, видим, что суммируемо семейство $\{|a_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi_+ \cup \Xi_-)$, т. е. семейство $\{|a_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Легко проверить, что семейство (1) вещественных чисел имеет сумму тогда и только тогда, когда хоть одно из семейств $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_+)$ и $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_-)$ суммируемо. Предоставляем читателю провести соответствующее доказательство.

3. В этом пункте мы увидим, что на суммируемые числовые семейства распространяются законы коммутативности и ассоциативности, верные для конечных числовых семейств.

Предложение 1. Если φ — взаимнооднозначное отображение множества H на множество Ξ и если семейство (1) суммируемо, то суммируемо и семейство

$$\{a_{\varphi(\eta)}\} \ (\eta \in H) \tag{8}$$

и

$$\sum_{\eta\in H} a_{\varphi(\eta)} = \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi.$$

Доказательство. Пусть число l — сумма семейства (1). Проверим, что число l служит также суммой семейства (8).

Для этого, взяв какое-нибудь число $\varepsilon > 0$, найдем множество $\Xi_\varepsilon \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$, такое, что $\left|\sum_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \varepsilon$ при любом $\widetilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$, содержащем Ξ_ε, и рассмотрим множество $H_\varepsilon =$

$=\varphi^{-1}[\Xi_\varepsilon]$. Это множество конечно. Если $\widetilde{H}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}[H]$ и $\widetilde{H}\supset H_\varepsilon$, то $\varphi[\widetilde{H}]\supset\Xi_\varepsilon$. Заметим еще, что в силу свойства коммутативности конечных числовых семейств

$$\sum_{\eta\in\widetilde{H}} a_{\varphi(\eta)} = \sum_{\xi\in\varphi[\widetilde{H}]} a_\xi.$$

Поэтому $\left|\sum_{\eta\in\widetilde{H}} a_{\varphi(\eta)} - l\right| = \left|\sum_{\xi\in\varphi[\widetilde{H}]} a_\xi - l\right| \leqslant \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *(Коммутативность сумм числовых семейств.) Если семейство* (1) *суммируемо, а* φ *— взаимнооднозначное отображение множества* Ξ *на себя, то и переставленное семейство* $\{a_{\varphi(\xi)}\}$ $(\xi\in\Xi)$ *тоже суммируемо, и* $\sum_{\xi\in\Xi} a_{\varphi(\xi)} = \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi$.

Аналогичное утверждение верно и в отношении семейств, имеющих сумму.

Предложение 1 дает возможность всегда, когда это оказывается необходимым, перейти к рассмотрению семейств, для которых множеством индексов служит $\mathbf{N}$ (если Ξ — счетно) или $\mathbf{N}_k$ (если Ξ — конечно). Для этого надо рассмотреть взаимнооднозначное отображение φ множества $\mathbf{N}$ (или $\mathbf{N}_k$) на Ξ и применить предложение 1.

В следующем предложении доказана ассоциативность сумм числовых семейств.

Предложение 2. Предположим, что множество Ξ равно объединению не более чем счетного семейства своих подмножеств $\{\Xi_\eta\}$ $(\eta\in H)$:

$$\Xi = \bigcup_{\eta\in H}\Xi_\eta,$$

и что $\Xi_{\eta'}\cap\Xi_{\eta''}=\Lambda$, если η', $\eta''\in H$ и $\eta'\neq\eta''$. Если семейство (1) суммируемо, то суммируемо каждое из семейств

$$\{a_\xi\}\ (\xi\in\Xi_\eta) \tag{9}$$

и семейство $\left\{\sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi\right\}$ $(\eta\in H)$ и

$$\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi = \sum_{\eta\in H}\sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi. \tag{10}$$

Доказательство. Суммируемость каждого из семейств (9) уже доказана в следствии 1 к предложению 2 п. 2. Возьмем произвольное положительное число ε и докажем, что существует множество $H_\varepsilon\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}[H]$, такое, что

$$\left|\sum_{\eta\in\widetilde{H}}\left(\sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi\right) - l\right| \leqslant \varepsilon$$

при любом $\widetilde{H}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}[H]$, содержащем множество H_ε; здесь $l=\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi$. Тем самым предложение будет доказано.

Сначала найдем конечное множество индексов $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$ такое, что $\left|\sum\limits_{\xi\in\widetilde{\Xi}} a_\xi - l\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $\widetilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[\Xi]$, таких, что $\widetilde{\Xi} \supset \Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Затем положим $H_\varepsilon = \left\{\eta \in H: \Xi_\eta \cap \Xi_{\frac{\varepsilon}{2}} \neq \Lambda\right\}$ и проверим, что множество H_ε обладает нужными свойствами.

Сначала покажем, что H_ε — конечное множество. Действительно, каждому элементу ξ конечного множества $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$ можно поставить в соответствие тот (единственный!) элемент η множества H_ε, при котором $\xi \in \Xi_\eta$. Поэтому множество H_ε, будучи образом конечного множества, само конечно.

Пусть же $\widetilde{H} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[H]$, $\widetilde{H} \supset H_\varepsilon$. Обозначим буквой p число элементов множества $\widetilde{H}$. При любом $\eta \in \widetilde{H}$ существует такое конечное подмножество Θ_η множества Ξ_η, что

$$\left|\sum_{\xi\in\Theta_\eta} a_\xi - \sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2p} \tag{11}$$

и

$$\Theta_\eta \supset \Xi_\eta \cap \Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Множество $\Theta = \bigcup\limits_{\eta\in\widetilde{H}} \Theta_\eta$ конечно и содержит множество $\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$$\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}} = \Xi_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap \bigcup_{\eta\in H} \Xi_\eta = \bigcup_{\eta\in H_\varepsilon} (\Xi_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap \Xi_\eta) \subset \bigcup_{\eta\in H_\varepsilon} \Theta_\eta \subset \bigcup_{\eta\in\widetilde{H}} \Theta_\eta = \Theta.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{\xi\in\Theta} a_\xi - l\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Наконец, учитывая (11), ассоциативность сумм конечных семейств и (12), имеем

$$\left|\sum_{\eta\in\widetilde{H}} \sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi - l\right| = \left|\left(\sum_{\eta\in\widetilde{H}} \sum_{\xi\in\Theta_\eta} a_\xi - l\right) + \sum_{\eta\in\widetilde{H}} \left(\sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi - \sum_{\xi\in\Theta_\eta} a_\xi\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{\eta\in\widetilde{H}} \sum_{\xi\in\Theta_\eta} a_\xi - l\right| + \sum_{\eta\in\widetilde{H}} \left|\sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi - \sum_{\xi\in\Theta_\eta} a_\xi\right| = \left|\sum_{\xi\in\Theta} a_\xi - l\right| +$$
$$+ \sum_{\eta\in\widetilde{H}} \left|\sum_{\xi\in\Xi_\eta} a_\xi - \sum_{\xi\in\Theta_\eta} a_\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + p\cdot\frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Допустим, что* $\Xi = A \times B$, *где* A, B — *два не более чем счетных множества. Если семейство* (1) *суммируемо, то при любом* $\alpha \in A$ *суммируемо семейство* $\{a_{(\alpha, \beta)}\}$ $(\beta \in B)$; *семейство* $\left\{\sum\limits_{\beta \in B} a_{(\alpha, \beta)}\right\}$ $(\alpha \in A)$ *также суммируемо и* $\sum\limits_{\xi \in \Xi} a_\xi = \sum\limits_{\alpha \in A}\left(\sum\limits_{\beta \in B} a_{(\alpha, \beta)}\right)$.

Ниже (см. следствие к предложению 6 п. 4) мы докажем утверждение, в некотором смысле обратное предложению 2.

4. Этот пункт посвящен семействам неотрицательных чисел. Обращение с этими семействами особенно просто: они всегда имеют сумму и, грубо говоря, действовать с ними можно, как с конечными семействами конечных чисел.

Предложение 1. Если все члены семейства (1) — неотрицательные числа (конечные или нет), то оно имеет сумму. Эта сумма неотрицательна; она конечна в том и только в том случае, когда множество всех сумм конечных подсемейств семейства (1) ограничено, в противном случае сумма равна $+\infty$.

Доказательство. Предложение будет доказано, если мы установим, что суммой неотрицательного семейства (1) служит число

$$l = \sup_{\tilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}[\Xi]} \left(\sum_{\xi \in \tilde{\Xi}} a_\xi\right).$$

Возьмем произвольное число $l' < l$. В силу известного свойства точной верхней границы числового множества найдется множество $\Xi_{l'} \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}[\Xi]$, такое, что $l' \leqslant \sum\limits_{\xi \in \Xi_{l'}} a_\xi$. Если $\tilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}[\Xi]$ и $\tilde{\Xi} \supset \Xi_{l'}$, то и подавно $l' \leqslant \sum\limits_{\xi \in \tilde{\Xi}} a_\xi$.

Итак,
$l' \leqslant \sum\limits_{\xi \in \tilde{\Xi}} a_\xi \leqslant l$ $\left(\tilde{\Xi} \supset \Xi_{l'}, \tilde{\Xi} \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}[\Xi]\right)$. Этим существование суммы семейства (1) и равенство $l = \sum\limits_{\xi \in \Xi} a_\xi$ доказаны.

Замечание 1. Попутно мы установили, что если семейство (1) неотрицательно, то его сумма равна точной верхней границе множества всех сумм конечных подсемейств семейства (1).

Следствие 1. *Пусть* $\{a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *и* $\{b_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *два суммируемых семейства вещественных чисел. Если* $a_\xi \leqslant b_\xi$ *при всех* $\xi \in \Xi$, *то* $\sum\limits_{\xi \in \Xi} a_\xi \leqslant \sum\limits_{\xi \in \Xi} b_\xi$.

Доказательство. Согласно предложению 2 п. 1

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi - \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi = \sum_{\xi\in\Xi} (b_\xi - a_\xi).$$

Но $(b_\xi - a_\xi) \geqslant 0$ при всех $\xi \in \Xi$. Согласно предложению 1, $\sum\limits_{\xi\in\Xi} (b_\xi - a_\xi) \geqslant 0$,

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi - \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi \geqslant 0, \text{ т. е. } \sum_{\xi\in\Xi} a_\xi \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi.$$

Следствие доказано.

Следующее утверждение называют «теоремой сравнения».

Предложение 2. Если семейство (1) неотрицательно и если семейство

$$\{b_\xi\} \quad (\xi \in \Xi) \tag{13}$$

таково, что $a_\xi \leqslant b_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$, то $\sum\limits_{\xi\in\Xi} a_\xi \leqslant \sum\limits_{\xi\in\Xi} b_\xi$.

В частности, если семейство (13) суммируемо, то и семейство (1) суммируемо.

Доказательство. Ясно, что $\sum\limits_{\xi\in\tilde\Xi} a_\xi \leqslant \sum\limits_{\xi\in\tilde\Xi} b_\xi$, каково бы ни было конечное множество индексов $\tilde\Xi$ $(\tilde\Xi \subset \Xi)$. Но в силу замечания 1 к предложению 1 $\sum\limits_{\xi\in\tilde\Xi} b_\xi \leqslant \sum\limits_{\xi\in\Xi} b_\xi$. Значит,

$$\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi = \sup_{\tilde\Xi\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}([\Xi])} \left(\sum_{\xi\in\tilde\Xi} a_\xi \right) \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi.$$

Доказательство закончено.

Пользуясь теоремой сравнения, докажем два предложения о произвольных (не обязательно неотрицательных) числовых семействах.

Предложение 3. Пусть

$$\{a_\xi\} \quad (\xi \in \Xi), \tag{14}$$

$$\{b_\xi\} \quad (\xi \in \Xi), \tag{15}$$

$$\{c_\xi\} \quad (\xi \in \Xi) \tag{16}$$

— три семейства вещественных чисел. Предположим, что при всех $\xi \in \Xi$

$$a_\xi \leqslant b_\xi \leqslant c_\xi \tag{17}$$

и что семейства (14) и (16) суммируемы. Тогда и семейство (15) суммируемо и

$$\sum_{\xi\in\Xi} a_\xi \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \leqslant \sum_{\xi\in\Xi} c_\xi. \tag{18}$$

Доказательство. Из условия (17) следует, что $0 \leqslant b_\xi - a_\xi \leqslant c_\xi - a_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. Значит, семейства $\{b_\xi - a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $\{c_\xi - a_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ неотрицательны, а второе из них суммируемо согласно предложению 2 п. 1. Применяя теорему сравнения, заключаем, что и первое из этих семейств суммируемо, причем

$$0 \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} (b_\xi - a_\xi) \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} (c_\xi - a_\xi).$$

Еще раз применяем предложение 2 п. 1: из того, что $b_\xi = (b_\xi - a_\xi) + a_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$, следует теперь суммируемость семейства (15). Неравенство (18) (поскольку суммируемость семейства (15) уже доказана) вытекает из следствия 1 к предложению 1 этого пункта.

Предложение полностью доказано.

В следующем предложении, доказательство которого также использует теорему сравнения, пойдет речь о семействах комплексных чисел.

Предложение 4. Если семейство (1) комплексных чисел суммируемо, то оно и абсолютно суммируемо, причем

$$\left| \sum_{\xi \in \Xi} a_\xi \right| \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} |a_\xi|. \tag{19}$$

Доказательство. При каждом $\xi \in \Xi$ положим $a_\xi = x_\xi + i y_\xi$, где x_ξ и y_ξ — вещественные (конечные) числа. Мы уже знаем, что семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{y_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ суммируемы, если суммируемо семейство (1) (см. замечание 1, п. 1). Значит, согласно предложению 2 п. 2, они абсолютно суммируемы. Но

$$|a_\xi| = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} \leqslant |x_\xi| + |y_\xi| \quad (\xi \in \Xi).$$

Семейство $\{|x_\xi| + |y_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi)$ суммируемо в силу предложения 2 п. 1. Значит, по теореме сравнения (предложение 2), суммируемо семейство $\{|a_\xi|\}$ $(\xi \in \Xi)$, так что семейство (1) абсолютно суммируемо.

Осталось доказать неравенство (19). Пусть λ — такое комплексное число, что $\lambda \sum_{\xi \in \Xi} a_\xi = \left| \sum_{\xi \in \Xi} a_\xi \right|$, $|\lambda| = 1$. Тогда

$$\left| \sum_{\xi \in \Xi} a_\xi \right| = \lambda \sum_{\xi \in \Xi} a_\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \lambda a_\xi.$$

Значит, число $\sum_{\xi \in \Xi} \lambda a_\xi$ вещественно, и потому

$$\sum_{\xi \in \Xi} \lambda a_\xi = \operatorname{Re} \left(\sum_{\xi \in \Xi} \lambda a_\xi \right) = \sum_{\xi \in \Xi} \operatorname{Re} \lambda a_\xi \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} |\operatorname{Re} \lambda a_\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\xi \in \Xi} |\lambda a_\xi| = \sum_{\xi \in \Xi} |\lambda| \cdot |a_\xi| = \sum_{\xi \in \Xi} |a_\xi|.$$

Предложение доказано полностью.

Вернемся к неотрицательным числовым семействам.

Предложение 5. Если (1) — неотрицательное семейство, а φ и H обозначают то же, что в предложении 1 п. 3, то

$$\sum_{\eta \in H} a_{\varphi(\eta)} = \sum_{\xi \in \Xi} a_\xi .$$

Доказательство. В том случае, когда $\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi < +\infty$, это утверждение было уже доказано. Предположим поэтому, что $\sum_{\xi \in \Xi} a_\xi = +\infty$. Взяв какое-нибудь конечное вещественное число M, найдем конечное множество индексов $\tilde{\Xi}\,(\tilde{\Xi} \subset \Xi)$ такое, что

$$\sum_{\xi \in \tilde{\Xi}} a_\xi \geqslant M. \tag{20}$$

Используя коммутативность суммы конечного семейства, заключаем, что

$$\sum_{\eta \in \varphi^{-1}[\tilde{\Xi}]} a_\eta = \sum_{\xi \in \tilde{\Xi}} a_\xi \geqslant M.$$

Остается заметить, что множество $\varphi^{-1}[\tilde{\Xi}]$ конечно, так как φ — взаимнооднозначное отображение. Таким образом,

$$\sum_{\eta \in H} a_{\varphi(\eta)} \geqslant \sum_{\eta \in \varphi^{-1}[\tilde{\Xi}]} a_{\varphi(\eta)} \geqslant M,$$

каково бы ни было вещественное конечное число M. Значит, $\sum_{\eta \in H} a_{\varphi(\eta)} = +\infty$.

Предложение доказано.

Замечание. Пользуясь замечанием к предложению 2 п. 2, легко доказать, что предложение 5 верно для любого семейства (1), имеющего сумму.

Предложение 6. Пусть Ξ, H и Ξ_η обозначают то же, что в предложении 2 п. 3. Если семейство (1) неотрицательно, то справедливо равенство (10).

Доказательство. Здесь достаточно рассмотреть только тот случай, когда семейство (1) не суммируемо.

Снова, взяв число M $(M \in (0, +\infty))$, найдем множество $\tilde{\Xi}$, удовлетворяющее условию (20). В множестве H содержится лишь конечное число таких элементов η, что $\Xi_\eta \cap \tilde{\Xi} \neq \Lambda$; они образуют множество $\tilde{H}$. Если $\eta \in \tilde{H}$, то

$$\sum_{\xi \in \Xi_\eta} a_\xi \geqslant \sum_{\xi \in \Xi_\eta \cap \tilde{\Xi}} a_\xi,$$

так что

$$\sum_{\eta\in\tilde{H}}\left(\sum_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right)\geqslant\sum_{\eta\in\tilde{H}}\left(\sum_{\xi\in\Xi_\eta\cap\tilde{\Xi}}a_\xi\right)=\sum_{\xi\in\tilde{\Xi}}a_\xi\geqslant M.$$

Тем более,

$$\sup_{\tilde{H}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}[H]}\sum_{\eta\in\tilde{H}}\left(\sum_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right)\geqslant M,$$

каково бы ни было число M $(M\in(0,+\infty))$. Но последний supremum, как это видно из замечания 1 к предложению 1, равен сумме семейства $\left\{\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right\}$ $(\eta\in H)$. Итак,

$$\sum_{\eta\in H}\left(\sum_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right)=+\infty=\sum_{\xi\in\Xi}a_\xi.$$

Предложение доказано.

Следствие. *Предположим, что* Ξ, H, Ξ_η *обозначают то же, что и в предложении 2 п. 3. Если* $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — *такое семейство комплексных чисел, что при любом* $\eta\in H$ *семейство* $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi_\eta)$ *суммируемо и, кроме того, суммируемо семейство* $\left\{\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}|a_\xi|\right\}$ $(\eta\in H)$, *то и семейство* (1) *суммируемо, причем*

$$\sum_{\xi\in\Xi}a_\xi=\sum_{\eta\in H}\sum_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi.$$

Доказательство. Согласно только что доказанному предложению, $\sum\limits_{\xi\in\Xi}|a_\xi|=\sum\limits_{\eta\in H}\left(\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}|a_\xi|\right)<+\infty$. Значит, семейство (1) суммируемо и выполняется равенство (10) (следствие 2 к предложению 1 п. 2).

Следствие доказано.

Предоставляем читателю сформулировать и доказать аналог следствия к предложению 2 п. 3 для неотрицательных семейств.

Замечание. Если выполнены условия только что доказанного следствия, причем $a_\xi\in\overline{R}$, и при любом $\eta\in H$ либо $a_\xi\geqslant 0$ при всех $\xi\in\Xi_\eta$, либо $a_\xi\leqslant 0$ при всех $\xi\in\Xi_\eta$, то из суммируемости семейств $\{a_\xi\}$ $(\xi\in\Xi_\eta)$, $(\eta\in H)$ и $\left\{\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right\}$ $(\eta\in H)$ следует суммируемость семейства (1) и равенство (10).

Доказательство. Действительно, в этом случае $\sum\limits_{\eta\in H}\left|\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right|<+\infty$. Но $\left|\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}a_\xi\right|=\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}|a_\xi|$ при любом $\eta\in H$, так что $\sum\limits_{\eta\in H}\sum\limits_{\xi\in\Xi_\eta}|a_\xi|<+\infty$, и применимо следствие к предложению 6.

Замечание. Используя замечание к предложению 2 п. 2, читатель без труда сформулирует и докажет теорему об ассоциативности числовых семейств вещественных чисел, имеющих сумму.

5. В этом пункте мы остановимся на суммируемых семействах комплексных чисел, для которых множеством индексов служит множество всех натуральных чисел. Мы покажем, что теория таких семейств есть по существу теория абсолютно сходящихся числовых рядов.

Отметим, что не абсолютно сходящийся ряд порождает числовое семейство, не имеющее суммы. Так, например, семейство $\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbf{N})$ не имеет суммы, хотя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится.

Предложение 1. Семейство комплексных чисел

$$\{a_n\} \quad (n \in \mathbf{N}) \tag{21}$$

суммируемо тогда и только тогда, когда абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty.$$

Если это условие выполнено, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n, \tag{22}$$

т. е. сумма семейства (21) равна пределу $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m} a_n$.

Доказательство. Предположим сначала, что все числа a_n $(n=1, 2, \ldots)$ неотрицательны. Известно, что

$$\sum_{n \in \widetilde{\mathbf{N}}} a_n \leqslant \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n,$$

каково бы ни было конечное множество $\widetilde{\mathbf{N}}$ натуральных чисел. Значит, в частности, при любом натуральном k

$$\sum_{n \in \mathbf{N}_k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$$

и

$$\lim_{k\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \leqslant \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n,$$

так что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n$.

Пусть теперь $\widetilde{\mathbf{N}}$ — какое-нибудь конечное множество натуральных чисел. Тогда $\widetilde{\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}_k$, где k — наибольшее из чисел, содержащихся в $\widetilde{\mathbf{N}}$. Значит,

$$\sum_{n\in\tilde{N}} a_n \leqslant \sum_{n\in N_k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

каково бы ни было множество $\tilde{N} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}[N]$, и потому

$$\sum_{n\in N} a_n = \sup_{\tilde{N}\in\mathfrak{P}_{\text{fin}}[N]} \left(\sum_{n\in\tilde{N}} a_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Итак, если семейство (21) неотрицательно, то его сумма равна $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В частности, это семейство суммируемо тогда и только тогда, когда соответствующий ряд сходится.

Теперь откажемся от условия неотрицательности семейства (21) и предположим, что его элементы — комплексные числа. Если семейство (21) суммируемо, то оно и абсолютно суммируемо (предложение 4 п. 4), так что суммируемо семейство $\{|a_n|\}$ $(n \in N)$. Значит, по доказанному, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{23}$$

конечна. Если же сходится ряд (23), то, по доказанному, семейство $\{|a_n|\}$ $(n\in N)$ суммируемо, т. е. семейство (21) абсолютно суммируемо. Осталось доказать равенство (22). С этой целью проверим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{n\in N} \operatorname{Re} a_n, \tag{24}$$

если выполнено условие предложения. Из неравенств*

$$0 \leqslant (\operatorname{Re} a_n)^+ \leqslant |\operatorname{Re} a_n| \leqslant |a_n|,$$

$$0 \leqslant (\operatorname{Re} a_n)^- \leqslant |\operatorname{Re} a_n| \leqslant |a_n| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)^+ = \sum_{n\in N} (\operatorname{Re} a_n)^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)^- = \sum_{n\in N} (\operatorname{Re} a_n)^-,$$

причем все выписанные здесь суммы конечны.

Воспользуемся тождеством

$$(\operatorname{Re} a_n)^+ - (\operatorname{Re} a_n)^- = \operatorname{Re} a_n \quad (n \in N)$$

и предложением 2 п. 1. Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(\operatorname{Re} a_n)^+ - (\operatorname{Re} a_n)^-] = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n)^- =$$
$$= \sum_{n\in N} (\operatorname{Re} a_n)^+ - \sum_{n\in N} (\operatorname{Re} a_n)^- = \sum_{n\in N} [(\operatorname{Re} a_n)^+ - (\operatorname{Re} a_n)^-] = \sum_{n\in N} \operatorname{Re} a_n.$$

---

* Если $x \in R$, то, по определению, $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$.

Аналогично доказывается равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \sum_{n \in \mathrm{N}} \operatorname{Im} a_n. \qquad (25)$$

Из равенств (24) и (25) следует равенство (22).

Предложение доказано.

Замечание. Легко показать, что если семейство (21) вещественных чисел имеет сумму, то существует предел $\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет ту же сумму, что и семейство (21).

В заключение сделаем одно простое замечание, которое часто используется в первой и второй главах.

Предложение 2. Пусть Ξ — не более, чем счетное множество, а ε — положительное конечное число. Тогда существует числовое семейство

$$\{\varepsilon_\xi\} \quad (\xi \in \Xi) \qquad (26)$$

такое, что

а) все его члены — положительные конечные числа;

б) $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi = \varepsilon$.

Доказательство. Если множество Ξ конечно, то за ε_ξ при любом $\xi \in \Xi$ можно принять число $\frac{\varepsilon}{p}$, где p — число элементов множества Ξ.

Если множество Ξ счетно, то существует взаимнооднозначное отображение ψ множества Ξ на множество N всех натуральных чисел. Положим

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon}{2^{\psi(\xi)}} \quad (\xi \in \Xi).$$

Ясно, что все числа ε_ξ положительны. Чтобы вычислить сумму этого семейства, вспомним предложение 1 п. 3, согласно которому

$$\sum_{\xi \in \Xi} \frac{\varepsilon}{2^{\psi(\xi)}} = \sum_{n \in \mathrm{N}} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Последняя сумма в соответствии с предложением 1 этого пункта равна сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$, которая, в свою очередь, равна ε.

Доказательство закончено.

ДОБАВЛЕНИЕ 3

ПРОСТРАНСТВА R^ν. ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Цель этого добавления — дать сжатую сводку определений и фактов, связанных с евклидовыми пространствами R^ν и необходимых для понимания этой книги. Доказательств мы, как правило, не приводим. Исключение сделано только для теорем о дифференцируемых отображениях и некоторых теорем о линейных отображениях, так как эти теоремы обычно отсутствуют в учебных руководствах.

1. Мы уже знаем, как определяется множество R^ν $(\nu \in \mathbf{N})$ (д. 1, п. 5, определение 5).

Напомним, что элемент множества R^ν $(\nu \geqslant 2)$ представляет собою функцию, заданную на множестве $\mathbf{N}_\nu$ со значениями в множестве R (упорядоченный набор ν вещественных чисел). Поэтому, в соответствии с определением 1 из д. 1, п. 4, ясно, что означает сумма конечного семейства векторов и произведение λx вектора $x \in R^\nu$ на число $\lambda \in R$. Символом 0 мы в этом добавлении часто будем обозначать тот элемент множества R^ν, все координаты которого равны нулю (см. конец п. 5 в д. 1). Несмотря на свое несовершенство (отсутствует указание на число ν), это обозначение не вызовет недоразумений.

Мы не останавливаемся на простых свойствах сумм векторов и произведений векторов на числа.

Обратимся теперь к отображениям, заданным на подмножествах множества R^λ со значениями в множестве R^ν $(\lambda,\ \nu \in \mathbf{N})$.

Обозначим символом $P_{\nu,s}$ $(s \in \mathbf{N}_\nu)$ отображение множества R^ν в множество R, заданное так:

$$P_{\nu,s}((x_1, x_2, \ldots, x_\nu)) = x_s \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in R^\nu).$$

Отображение $P_{\nu,s}$ естественно назвать проектированием множества R^ν на s-ю координатную ось (если $\nu = 1$, то $P_{\nu,1} = P_{1,1}$ — просто тождественное отображение множества R^1 $(= R)$ на себя). Если Φ — отображение множества $E \subset R^\lambda$ в множество R^ν, то можно образовать ν сложных отображений (д. 1, определение 2, п. 3):

$$P_{\nu,1} \circ \Phi,\ P_{\nu,2} \circ \Phi, \ldots, P_{\nu,\nu} \circ \Phi.$$

Каждое из этих отображений — просто числовая функция, заданная на множестве E (д. 1, п. 4), причем

$$\Phi(x) = ((P_{\nu,1} \circ \Phi)(x), \ldots, (P_{\nu,\nu} \circ \Phi)(x)) \quad (x \in E).$$

Определение 1. Функции $P_{\nu,s} \circ \Phi$ $(s = 1, 2, \ldots, \nu)$ называются *координатными функциями отображения* Φ.

Легко построить отображение множества $E \subset R^\lambda$ в множество R^ν с заданными координатными функциями. Это значит, что если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ — какие-нибудь конечные функции, заданные на множестве E, то существует отображение Φ множества E в множество R^ν, для которого s-й координатной функцией служит функция $\varphi_s : P_{\nu, s} \circ \Phi = \varphi_s$ $(s = 1, 2, \ldots, \nu)$. Легко понять, что такое отображение Φ единственно:

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)) \quad (x \in E).$$

Резюмируя сказанное, мы приходим к следующему выводу: изучение отображений подмножества E множества R^λ в множество R^ν равносильно изучению упорядоченных наборов ν конечных числовых функций, заданных на множестве E.

2. В этом пункте речь идет о скалярном произведении, норме и расстоянии в множестве R^ν.

Определение 1. Отображение s_ν произведения $R^\nu \times R^\nu$ в множество R, которое любой упорядоченной паре $(x, y) \in R^\nu \times R^\nu$ $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu),\ y = (y_1, \ldots, y_\nu))$ ставит в соответствие число $s_\nu((x, y)) = x_1 y_1 + \ldots + x_\nu y_\nu$, мы будем называть *скалярным произведением* (в множестве R^ν). Само число $s_\nu((x, y))$ называют *скалярным произведением векторов* x и y и обозначают обычно символом $\langle x, y\rangle_\nu$ или просто $\langle x, y\rangle$ (указание на размерность ν опускают, если это не может привести к недоразумению).

Предложение 1. Скалярное произведение s_ν обладает следующими свойствами;

1) $s_\nu((x, x)) \geqslant 0$ при любом $x \in R^\nu$;

2) если вектор $x \in R^\nu$ таков, что $s_\nu((x, x)) = 0$, то $x = 0$, и если $x = 0$, то $s_\nu((x, x)) = 0$;

3) $s_\nu((x, y)) = s_\nu((y, x))$ $((x, y) \in R^\nu \times R^\nu)$;

4) $s_\nu((\alpha x + \beta y, z)) = \alpha s_\nu((x, z)) + \beta s_\nu((y, z))$, каковы бы ни были векторы x, y, $z \in R^\nu$ и числа α и β;

5) $$|s_\nu((x, y))| \leqslant \sqrt{s_\nu((x, x))} \cdot \sqrt{s_\nu((y, y))}, \tag{1}$$

каковы бы ни были векторы $x \in R^\nu$ и $y \in R^\nu$.

Последнее неравенство называют неравенством Коши—Буняковского.

Определение 2. Функцию p_ν, заданную на множестве R^ν следующим образом:

$$p_\nu(x) = \sqrt{s_\nu((x, x))} \quad (x \in R^\nu),$$

называют *нормой* (в множестве R^ν), а число $p_\nu(x)$ — *нормой вектора* x. Часто вместо $p_\nu(x)$ пишут $\|x\|_\nu$ или просто $\|x\|$.

Предложение 2. Норма p_ν обладает следующими свойствами:

1) p_ν — неотрицательная функция;

2) если $x \in R^\nu$, то $p_\nu(x) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$;

3) $p_\nu(x+y) \leqslant p_\nu(x) + p_\nu(y)$ при всех $x, y \in R^\nu$;

4) $p_\nu(\alpha x) = |\alpha| p_\nu(x)$ $(\alpha \in R,\ x \in R^\nu)$.

Следствие. *Каковы бы ни были* $x, y \in R^\nu$, *справедливо неравенство*

$$|p_\nu(x) - p_\nu(y)| \leqslant p_\nu(x-y).$$

Определение 3. Отображение ρ_ν множества $R^\nu \times R^\nu$ в множество $[0, +\infty) \subset R$, заданное равенством

$$\rho_\nu((x, y)) = p_\nu(x-y) = \|x-y\|_\nu \quad ((x, y) \in R^\nu \times R^\nu),$$

называется (евклидовым) *расстоянием* в множестве R^ν, а число $\rho_\nu((x, y))$, обозначаемое обычно и так: $\rho_\nu(x, y)$ или просто $\rho(x, y)$ — (евклидовым) *расстоянием между точками (векторами)* x и y.

Предложение 3. Расстояние ρ_ν обладает следующими свойствами:

1) $\rho_\nu(x, y) = \rho_\nu(y, x)$ $(x, y \in R^\nu)$;

2) если $x, y \in R^\nu$, то $\rho_\nu(x, y) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = y$;

3) $\rho_\nu(x, z) \leqslant \rho_\nu(x, y) + \rho_\nu(y, z)$ при всех $x, y, z \in R^\nu$.

В современной математике принято множество A, снабженное расстоянием (т. е. функцией ρ, заданной на произведении $A \times A$ и обладающей свойствами 1), 2), 3)), называть метрическим пространством. Точное определение этого понятия читатель узнает позже, при изучении последующих разделов анализа. В этой книге мы будем часто называть множество R^ν пространством R^ν и употреблять такие обороты речи, как „подмножество пространства R^ν“, „отображение пространства R^ν“ (имея в виду подмножества множества R^ν, отображения множества R^ν).

Определение 4. Пусть r — положительное (конечное) вещественное число, а $\overline{x} \in R^\nu$. Множество

$$D^\nu(\overline{x}, r) = \{x \in R^\nu : \rho_\nu(x, \overline{x}) < r\}$$

называется *открытым ν-мерным шаром радиуса r с центром в точке x*. Множество

$$\overline{D^\nu(\overline{x}, r)} = \{x \in R^\nu : \rho_\nu(x, \overline{x}) \leqslant r\}$$

называется *замкнутым ν-мерным шаром радиуса r с центром в точке $\overline{x}$*.

3. В этом пункте вводятся и обсуждаются основные понятия теории пределов в пространстве R^ν.

Определение 1. *Окрестностью точки x пространства* R^ν называют любое множество точек этого пространства, содержащее некоторый открытый ν-мерный шар с центром в точке x.

Итак, множество V есть окрестность точки x пространства R^ν тогда и только тогда, когда $V \subset R^\nu$ и существует число $r \in (0, +\infty)$, такое, что

$$V \supset D^\nu(x, r).$$

Так, например, шары $D^\nu(x, r)$ и $\overline{D^\nu(x, r)}$ служат окрестностями своего центра; если $x \in (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_\nu, b_\nu)$, то прямоугольник $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_\nu, b_\nu)$ есть окрестность точки x.

Определение 2. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества R^ν *сходится к точке* $x \in R^\nu$ (в пространстве R^ν), или что *точка x есть предел последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, и пишут $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для любой окрестности V точки x существует натуральное число n_V, такое, что $x_n \in V$ при всех натуральных n, таких, что $n \geqslant n_V$.

Читатель легко докажет, что равенство $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равносильно такому: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_\nu(x_n, x) = 0$.

Предложение 1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек множества R^ν, $x_0 \in R^\nu$, $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_\nu^{(n)})$ $(n \in \mathrm{N})$, $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)})$. Следующие утверждения равносильны.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_s^{(n)} = x_s^{(0)}$ $\quad (s \in \mathrm{N}_\nu)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Это предложение позволяет легко свести ряд задач о пределах последовательностей в пространстве R^ν $(\nu \geqslant 2)$ к уже решенным задачам о пределах последовательностей вещественных чисел. Так, например, пользуясь предложением 1, легко доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n,$$

если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — любые две последовательности точек множества R^{ν}, имеющие пределы, а α и β — любые конечные вещественные числа (α, $\beta \in R$).

Из предложения 1 следует также, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества R^{ν} в том и только в том случае имеет предел в пространстве R^{ν}, когда она сходится в себе, т. е. когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $n(\varepsilon)$ такое, что $\rho_{\nu}(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$ при всех натуральных n, m, удовлетворяющих неравенству n, $m \geqslant n(\varepsilon)$.

Чтобы высказать определение предела для отображений, заданных на подмножествах множества R^{λ} со значениями в множестве R^{ν}, нам потребуется понятие точки сгущения.

Определение 3. Пусть E — подмножество множества R^{λ}. Говорят, что точка $x \in R^{\lambda}$ есть *точка сгущения множества E*, если любая окрестность V точки x в пространстве R^{λ} содержит точку, принадлежащую множеству E и отличную от точки x.

Определение 4. Предположим, что Φ — отображение множества $E \subset R^{\lambda}$ в множество R^{ν}, $\bar{x}$ — точка сгущения множества E, y — точка пространства R^{ν}. Говорят, что y есть *предел отображения* Φ *в точке* $\bar{x}$ (или при стремлении к точке $\bar{x}$), и пишут $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \Phi(x) = y$, если для любой окрестности W точки y (в пространстве R^{ν}) найдется окрестность V точки $\bar{x}$ (в пространстве R^{λ}) такая, что $\Phi(x) \in W$ для любой точки x, удовлетворяющей условиям $x \in E$, $x \neq \bar{x}$, $x \in V$, т. е.

$$\Phi\left[(E \cap V) \setminus \{\bar{x}\}\right] \subset W.$$

Предложение 2. Пусть Φ, E, $\bar{x}$ и y обозначают то же, что в определении 4. Для того чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{x \to \bar{x}} \Phi(x) = y,$$

необходимо и достаточно следующее условие: какова бы ни была последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $x_n \in E$, $x_n \neq \bar{x}$ ($n \in \mathbf{N}$) и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$, выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(x_n) = y.$$

Предложение 3. Пусть Φ, E, $\bar{x}$, y обозначают то же, что в определении 4, и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\nu}$ — координатные функции отображения Φ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{\nu})$.

Следующие утверждения равносильны:

1) $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \Phi(x) = y$,

2) $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \varphi_s(x) = y_s \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Определение 5. Пусть Φ — отображение множества E, содержащегося в пространстве R^λ, в пространство R^ν и пусть $\bar{x} \in E$. Говорят, что *отображение* Φ *непрерывно в точке* $\bar{x}$, если выполнено одно из двух следующих условий:

1) $\bar{x}$ не есть точка сгущения множества E;

2) $\bar{x}$ — точка сгущения множества E и

$$\lim_{x \to \bar{x}} \Phi(x) = \Phi(\bar{x}).$$

Если отображение Φ непрерывно в любой точке x множества E^*, $E^* \subset E$, то говорят, что Φ *непрерывно на множестве* E^*.

Предложение 4. Пусть Φ, E, $\bar{x}$ обозначают то же, что в определении 5.

Следующие утверждения равносильны:

1) отображение Φ непрерывно в точке $\bar{x}$;

2) для любой окрестности W точки $\Phi(\bar{x})$ пространства R^ν существует окрестность V точки $\bar{x}$ пространства R^λ такая, что при любом $x \in V \cap E$ точка $\Phi(x)$ принадлежит множеству W: $\Phi[V \cap E] \subset W$;

3) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что любая точка x множества E, удовлетворяющая неравенству $\rho_\lambda(x, \bar{x}) < \delta$, удовлетворяет неравенству

$$\rho_\nu(\Phi(x), \Phi(\bar{x})) < \varepsilon;$$

4) какова бы ни была последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек множества E такая, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x},$$

оказывается, что $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \Phi(\bar{x})$;

5) все координатные функции отображения Φ непрерывны в точке $\bar{x}$.

Определение 6. Пусть $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — конечное семейство вещественных чисел ($\alpha_\xi \in R$ при всех $\xi \in \Xi$) и $\{\Phi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — конечное семейство отображений множества $E (E \subset R^\lambda)$ в множество R^ν. Символом $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \Phi_\xi$ обозначается отображение, которое каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие точку $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \Phi_\xi(x) \in R^\nu$.

Предложение 5. 1) Если $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{\Phi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — те же семейства, о которых говорится в определении 6, и если все отображения $\{\Phi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ непрерывны в точке $\bar{x}$ множества E, то и отображение $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \Phi_\xi$ непрерывно в точке $\bar{x}$.

2) Если Φ — отображение множества $E\,(E\subset R^{\lambda})$ в множество E^* $(E^*\subset R^{\mu})$, непрерывное в точке $\bar{x}\in E$, а Ψ — отображение множества E^* $(E^*\subset R^{\mu})$ в пространство R^{ν}, непрерывное в точке $\Phi(\bar{x})$, то сложное отображение $\Psi\circ\Phi$ непрерывно в точке $\bar{x}$.

Определение 7. Непрерывное отображение Φ промежутка $[a, b]\subset R^1$ в пространство R^{ν} называется *путем* (в R^{ν}). Множество $\Phi[[a, b]]$ называют *носителем пути* Φ.

Множество точек пространства R^{ν}, являющееся носителем некоторого пути, называют иногда непрерывной кривой. Необходимо помнить, что непрерывные кривые могут совершенно не соответствовать распространенному наглядному представлению об этом понятии. Достаточно сказать, что замкнутый квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$ есть непрерывная кривая, т. е. существует непрерывное отображение Φ промежутка $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$ (так называемая кривая Пеано).

Определение 8. Если координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_{\nu}$ некоторого пути Φ в пространстве R^{ν}, заданного на промежутке $[a, b]$, имеют в каждой точке $t\in[a, b]$ конечные производные $\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_{\nu}'(t)$, причем функции $\varphi_1', \varphi_2', \ldots$ $\ldots, \varphi_{\nu}'$ непрерывны на $[a, b]$, то путь Φ называют *гладким*. Если существует такое конечное семейство точек $\{t_l\}$ $(l\in \mathbf{N}_s)$, что $t_1=a$, $t_s=b$, $t_j<t_{j+1}$ $(j\in \mathbf{N}_{s-1})$, и сужение $\Phi|_{[t_l, t_{l+1}]}$ $(l=1, \ldots, s-1)$ есть гладкий путь, то путь Φ называют *кусочно-гладким,* а его носитель — *кусочно-гладкой кривой.*

4. Тема этого пункта — открытые и замкнутые множества пространства R^{ν}, играющие в анализе очень важную роль, хотя ими и не исчерпываются все множества точек, содержащихся в R^{ν}.

Если $E\subset R^{\nu}$, то все точки множества R^{ν} можно разделить в зависимости от их расположения относительно E на три типа: внутренние, граничные и внешние.

Определение 1. Точка $x\in R^{\nu}$ называется 1) *внутренней точкой множества* E $(E\subset R^{\nu})$, если существует окрестность V точки x такая, что $V\subset E$;

2) *внешней точкой множества* E, если существует окрестность V точки x такая, что $V\subset R^{\nu}\setminus E$ (т. е. $V\cap E=\Lambda$);

3) *граничной точкой множества* E, если она не есть ни внешняя, ни внутренняя точка этого множества. Множество всех граничных точек множества E называется *границей множества* E и обозначается так: ∂E. Разумеется, любая внутренняя точка множества E принадлежит множеству E, а любая внешняя точка множества E ему не принадлежит. Что касается

граничных точек множества, то они могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству (см. ниже примеры).

Определение 2. 1) Множество G называется *открытым множеством пространства* R^ν, если $G \subset R^\nu$ и любая точка $x \in G$ — внутренняя точка множества G.

2) Множество F называется *замкнутым множеством пространства* R^ν, если $F \subset R^\nu$ и $\partial F \subset F$, т. е. если множество F содержит свою границу.

Иногда, если это не приводит к недоразумениям, открытое (замкнутое) множество пространства R^ν называют просто открытым (замкнутым) множеством. Легко понять, что открытое множество служит окрестностью любой своей точки.

Прежде чем переходить к примерам открытых и замкнутых множеств, заметим, что классификация множеств, данная в определении 2, неполна: бывают множества точек, одновременно не замкнутые и не открытые. В то же время множество R^ν и пустое множество Λ одновременно открыты и замкнуты.

Рассмотрим несколько примеров множеств.

Пример 1. Рассмотрим промежутки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$ вещественной прямой R. Если все эти промежутки открыты, то прямоугольник $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_\nu$ — открытое множество пространства R^ν, а если все они замкнуты, то Δ — замкнутое множество пространства R^ν.

Пример 2. Открытый шар $D^\nu(x, r)$ $(x \in R^\nu,\ r \in (0, +\infty))$ есть открытое множество пространства R^ν, а замкнутый шар $\bar{D}^\nu(x, r)$ — замкнутое. Отметим еще, что не пустой полуоткрытый прямоугольник $\Delta \subset R^\nu$, $\Delta = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_\nu, b_\nu)$, не есть ни открытое, ни замкнутое множество.

Предложение 1. 1) Если E — открытое множество пространства R^ν, то его дополнение $E' = R^\nu \setminus E$ — замкнутое множество пространства R^ν. 2) Если E — замкнутое множество пространства R^ν, то его дополнение $E' = R^\nu \setminus E$ — открытое множество пространства R^ν.

В следующем предложении дан критерий замкнутости множества, удобный при исследовании конкретных множеств.

Предложение 2. Следующие утверждения равносильны:

1) E — замкнутое множество пространства R^ν;

2) $E \subset R^\nu$, и для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ точек множества E, имеющей предел, выполнено включение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in E$.

Предложение 3. Пусть F — замкнутое множество пространства R^ν, и пусть $x \in R^\nu$, $x \overline{\in} F$. Тогда найдется такое число $\gamma > 0$, что $\rho_\nu(x, y) \geqslant \gamma$ при всех $y \in F$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда при любом $\gamma > 0$ найдется точка $y \in F$, такая, что $\rho_\nu(x, y) < \gamma$. Пусть $\gamma = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}$) и пусть y_n — точка множества F, такая, что $\rho_\nu(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Значит, согласно предложению 2, $x \in F$, что нелепо.

Предложение доказано.

Рассмотрим другие удобные для приложений достаточные условия замкнутости (открытости) множества.

Предложение 4. Предположим, что $E \subset R^\lambda$, а Φ — непрерывное отображение множества E в множество R^ν.

1) Если E — замкнутое множество пространства R^λ, а F — замкнутое множество пространства R^ν, то $\Phi^{-1}[F]$ — замкнутое множество пространства R^λ.

2) Если E — открытое множество пространства R^λ, а G — открытое множество пространства R^ν, то $\Phi^{-1}[G]$ — открытое множество пространства R^λ.

Предложение 5. 1) Пусть $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — семейство открытых множеств пространства R^ν. Тогда и $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} G_\xi$ — открытое множество пространства R^ν.

2) Пусть $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — конечное семейство открытых множеств пространства R^ν. Тогда $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} G_\xi$ — открытое множество пространства R^ν.

3) Пусть $\{F_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — конечное семейство замкнутых множеств пространства R^ν. Тогда $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} F_\xi$ — замкнутое множество пространства R^ν.

4) Пусть $\{F_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — семейство замкнутых множеств пространства R^ν. Тогда и $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} F_\xi$ — снова замкнутое множество пространства R^ν.

Замечание. В пунктах 2) и 3) этого предложения нельзя отбросить предложение о конечности рассматриваемых семейств.

Предложение 6. Предположим, что $E \subset R^\lambda$. Тогда $E \cup \partial E$ — замкнутое множество пространства R^λ.

Определение 3. Множество $E \cup \partial E$, где $E \subset R^\lambda$, называется *замыканием* множества E и обозначается символом $\overline{E}$.

Предложение 6 можно теперь сформулировать и так: замыкание любого множества точек пространства R^λ есть замкнутое множество пространства R^λ.

5. Этот пункт посвящен ограниченным замкнутым множествам. Роль этих множеств в анализе в значительной мере определяется тем, что непрерывные функции, заданные на них, обладают рядом простых и полезных свойств.

Определение 1. Множество E точек пространства R^ν называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором прямоугольнике:

$$E \subset [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu],$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ — конечные вещественные числа.*

Определение 2. Пусть E — множество точек пространства R^ν. Точная верхняя граница семейства чисел

$$\{\rho_\nu(x, y)\} \quad ((x, y) \in E \times E)$$

называется *диаметром множества* E и обозначается так: $\operatorname{diam} E$. Отметим, что если $E^* \subset E \subset R^\nu$, то $\operatorname{diam} E^* \leqslant \operatorname{diam} E$. Вполне возможен случай, когда $\operatorname{diam} E = +\infty$. Легко понять, что

$$\operatorname{diam}([\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_\nu, \beta_\nu]) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\nu} (\beta_j - \alpha_j)^2}.$$

Предложение 1. Следующие утверждения равносильны:

1) E — ограниченное множество точек пространства R^ν;

2) $\operatorname{diam} E < +\infty$;

3) существует такое число $r \in (0, +\infty)$ и точка $x \in R^\nu$, что $E \subset D^\nu(x, r)$.

Определение 3. Предположим, что E — множество точек множества R^ν, $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство подмножеств множества R^ν, такое, что $E \subset \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Тогда семейство $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ называют *покрытием множества* E. Если $\Xi_0 \subset \Xi$ и $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi_0} E_\xi \supset E$, то семейство $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_0)$ называют *подпокрытием покрытия* $\{E_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$.

Теорема 1 (д. 3) (Гейне—Борель—Больцано—Вейерштрасс). *Пусть $E \subset R^\nu$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *Множество E ограничено и замкнуто.*

2) *Какова бы ни была последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ точек множества E, найдется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, такая, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in E$.*

3) *Любое покрытие множества E, все элементы которого — открытые множества пространства R^ν, содержит конечное подпокрытие множества E.*

Теорема 2 (д. 3) (Вейерштрасс). *Если E — ограниченное и замкнутое множество точек пространства R^ν, а f — конеч-*

* Разумеется, в этом определении вместо замкнутого прямоугольника можно говорить об открытом или полуоткрытом прямоугольнике.

ная числовая функция, заданная и непрерывная на множестве E, то множество $f[E]$ ограничено (в R^1) и содержит наибольший и наименьший элемент. Иначе говоря, существуют точки x_*, $x^* \in E$, такие, что

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

при всех $x \in E$.

Сформулируем и докажем важное следствие этой теоремы.

Следствие. *Если Φ — непрерывное отображение ограниченного и замкнутого множества E точек пространства R^λ в пространство R^ν, то множество $\Phi[E]$ ограничено и замкнуто (в пространстве R^ν).*

Доказательство. Все координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\nu$ отображения Φ непрерывны (предложение 4 п. 3) на множестве E. Пусть

$$m_j = \inf_{x \in E} \varphi_j(x), \quad M_j = \sup_{x \in E} \varphi_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

Все числа m_j, M_j $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ конечны по теореме Вейерштрасса. Ясно, что

$$\Phi[E] \subset [m_1, M_1] \times [m_2, M_2] \times \dots \times [m_\nu, M_\nu],$$

и потому $\Phi[E]$ — ограниченное множество точек пространства R^ν.

Проверим теперь, что $\Phi[E]$ — замкнутое множество точек пространства R^ν. Для этого воспользуемся предложением 2 п. 4 и рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ точек множества $\Phi[E]$, имеющую предел. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \Phi[E]$. При каждом натуральном n существует точка $x_n \in E$, такая, что $y_n = \Phi(x_n)$. По теореме Больцано—Вейерштрасса (так как E ограничено и замкнуто) найдется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, такая, что последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, принадлежащий множеству E. Отображение Φ, будучи непрерывным на множестве E, непрерывно и в точке $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Значит,

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) \in \Phi[E].$$

Но $\Phi(x_{n_k}) = y_{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$, и так как $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \Phi[E]$, что и требовалось доказать.

Следствие доказано.

Определение 4. Отображение Φ множества $E\,(E \subset R^\lambda)$ в множество R^ν называется *равномерно непрерывным на множестве* $E_0\,(E_0 \subset E)$, если при любом положительном ε существует положительное δ, такое, что

$$\rho_\nu(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant \varepsilon$$

при всех x, $y \in E_0$, удовлетворяющих неравенству $\rho_\lambda(x, y) \leqslant \delta$.

Теорема 3 (д. 3) (Кантор). *Отображение* Φ *ограниченного и замкнутого множества* $E\,(E \subset R^\lambda)$ *в множество* R^ν, *непрерывное на множестве* E, *равномерно непрерывно на этом множестве.*

Сформулируем еще одно важное свойство ограниченных замкнутых множеств.

Предложение 2. Если $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность множеств пространства R^ν, такая, что множество E_n не пусто, ограничено и замкнуто при любом $n \in \mathbf{N}$, $E_n \supset E_{n+1}$ при любом $n \in \mathbf{N}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \Lambda$, т. е. существует точка $x \in R^\nu$, принадлежащая всем множествам E_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

В заключение этого пункта отметим еще один факт, относящийся к ограниченным замкнутым множествам.

Предположим, что ограниченное замкнутое множество F пространства R^ν содержится в открытом множестве $G\,(G \subset R^\nu)$. Тогда существует ограниченное открытое множество G' такое, что $F \subset G'$, $\overline{G'} \subset G$. В самом деле, для любой точки $x \in F$ найдется такое положительное число γ_x, что $\overline{D^\nu(x, \gamma_x)} \subset G$, ибо G — открытое множество. Семейство шаров $\{D^\nu(x, \gamma_x)\}$ $(x \in F)$ образует покрытие множества F. Поэтому, согласно теореме 1 (д. 3), существует конечное множество $F_0 \subset F$, такое, что $F \subset \bigcup\limits_{x \in F_0} D^\nu(x, \gamma_x)$. Множество $G' = \bigcup\limits_{x \in F_0} D^\nu(x, \gamma_x)$ открыто (предложение 5 п. 4) и ограничено, а его замыкание $\overline{G'}$, очевидно, содержится в замкнутом множестве $\bigcup\limits_{x \in F_0} \overline{D^\nu(x, \gamma_x)}$, которое, в свою очередь, содержится в G.

6. Линейные отображения, о которых пойдет речь в этом пункте, подробно изучаются в курсе линейной алгебры. Мы кратко напомним лишь те сведения о линейных отображениях, которые необходимы для понимания этой книги.

Определение 1. Отображение $\mathbf{A}$ множества R^λ в множество R^ν называется *линейным*, если

$$\mathbf{A}\left(\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi x_\xi\right) = \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \mathbf{A}(x_\xi),$$

каковы бы ни были конечные семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ векторов, принадлежащих множеству R^λ и $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ конечных вещественных чисел.

Определение 2. Пусть λ, $\nu \in \mathbf{N}$. *Матрицей из* λ *столбцов и* ν *строк* (коротко: $\lambda \times \nu$-матрица) называется семейство* A (конечных) вещественных чисел

* В соответствии с определением 1 д. 1 п. 4 имеет смысл сумма конечного семейства $\lambda \times \nu$-матриц и произведение $\lambda \times \nu$-матрицы на число $\alpha \in R$.

$$\{a_{(i,k)}\}\quad ((i,k)\in \mathbf{N}_\nu\times\mathbf{N}_\lambda).$$

Если $\lambda=\nu$, то матрицу A называют *квадратной*.

Матрицу из λ столбцов и ν строк удобно представлять себе в виде прямоугольной таблицы чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\lambda} \end{pmatrix}$$

По этой причине матрицу $\{a_{(i,k)}\}$ $((i,k)\in\mathbf{N}_\nu\times\mathbf{N}_1)$ называют *столбцом* (высоты ν).

Матрицу $\{a_{(i,k)}\}$ $((i,k)\in\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_\lambda)$ называют *строкой* (длины λ). Каждой строке длины λ можно поставить в соответствие вектор $x\in R^\lambda$, полагая $x=(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$, где $x_i=a_{(1,i)}$ $(i\in\mathbf{N}_\lambda)$. Мы часто не будем отличать строку $\{a_{(i,k)}\}$ от только что построенного вектора x.

Квадратную $\lambda\times\lambda$-матрицу $\{a_{(i,k)}\}$ $((i,k)\in\mathbf{N}_\lambda\times\mathbf{N}_\lambda)$ называют *единичной*, если $a_{(i,k)}=0$ при всех $(i,k)\in\mathbf{N}_\lambda\times\mathbf{N}_\lambda$, таких, что $i\neq k$, и $a_{(i,i)}=1$ $(i\in\mathbf{N}_\lambda)$. Такую матрицу мы будем обозначать символом E_λ.

Теперь введем важную операцию умножения матриц.

Определение 3. Если

$$\{a_{(i,k)}\}\quad ((i,k)\in\mathbf{N}_\lambda\times\mathbf{N}_\nu)$$

и

$$\{b_{(i,k)}\}\quad ((i,k)\in\mathbf{N}_\mu\times\mathbf{N}_\lambda)$$

— две матрицы (первую из них обозначим буквой A, а вторую — B), то матрица

$$\{c_{(i,k)}\}\quad ((i,k)\in\mathbf{N}_\mu\times\mathbf{N}_\nu),$$

где

$$c_{(i,k)}=\sum_{s=1}^{\lambda} b_{(i,s)}a_{(s,k)}\quad ((i,k)\in\mathbf{N}_\mu\times\mathbf{N}_\nu),$$

называется *произведением матрицы B на матрицу A* и обозначается так: $B\cdot A$.

Заметим, что произведение $B\cdot A$ матриц имеет смысл лишь тогда, когда число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A. Может оказаться, что произведение $B\cdot A$ имеет смысл, а $A\cdot B$ — нет. Но даже в том случае, когда оба эти произведения определены, они могут не быть равными.

Произведение матриц ассоциативно: если λ, μ, ν и ρ — натуральные числа, C — $\nu\times\rho$-матрица, B — $\mu\times\nu$-матрица, A — $\lambda\times\mu$-матрица, то $(C\cdot B)\cdot A=C\cdot(B\cdot A)$. Поэтому оба произведения, фигурирующие в последнем равенстве, можно обозначить просто через $C\cdot B\cdot A$.

Если A — $\lambda \times \mu$-матрица, B и C — $\nu \times \lambda$-матрицы, то $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. Равенство $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ также верно, если B и C — $\lambda \times \mu$-матрицы, а A — $\nu \times \lambda$-матрица. Если A — квадратная $\lambda \times \lambda$-матрица, а E_λ — единичная матрица, то $A \cdot E_\lambda = E_\lambda \cdot A = A$.

С помощью $\lambda \times \nu$-матрицы A каждому вектору $x \in R^\lambda$ ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$) поставим в соответствие вектор $A \cdot x$, принадлежащий множеству R^ν:

$$A \cdot x = (y_1, y_2, \ldots, y_\nu), \quad \text{где} \quad y_j = \sum_{s=1}^{\lambda} a_{js} x_s \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

(Как видно, j-ю координату вектора $A \cdot x$ вычисляют так: координаты вектора x записывают в столбец, затем s-й элемент j-й строки матрицы A умножают на s-й элемент столбца x ($s = 1, 2, \ldots, \lambda$), и все полученные таким образом произведения складывают.)

Отображение $\mathbf{A}$ множества R^λ в множество R^ν, заданное равенством $\mathbf{A}(x) = A \cdot x$, линейно; при этом $\mathbf{A}\left(e_s^{(\lambda)}\right) = (a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{\nu s})$*.

Предложение 1. Если $\mathbf{A}$ — линейное отображение множества R^λ в множество R^ν, то существует единственная $\lambda \times \lambda$-матрица A такая, что

$$\mathbf{A}(x) = A \cdot x$$

при всех $x \in R^\lambda$.

Матрицу A, о которой говорится в предложении, мы будем называть *матрицей линейного отображения* $\mathbf{A}$.

Предположим теперь, что $\{\mathbf{A}_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — конечное семейство линейных отображений множества R^λ в множество R^ν, а $\{\alpha_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — конечное семейство вещественных чисел ($\alpha_\xi \in R$ при всех $\xi \in \Xi$). Легко понять, что тогда отображение $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \mathbf{A}_\xi$ (см. определение 6 п. 3) также линейно.

Предложение 2. Предположим, что $\{\mathbf{A}_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — конечное семейство линейных отображений множества R^λ в множество R^ν, $\{\alpha_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — семейство конечных вещественных чисел.

Пусть A_ξ — матрица отображения $\mathbf{A}_\xi$ ($\xi \in \Xi$). Тогда матрица отображения $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \mathbf{A}_\xi$ равна $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi A_\xi$.

Предложение 3. Если $\mathbf{A}$ — линейное отображение множества R^λ в множество R^μ с матрицей A, $\mathbf{B}$ — линейное отображение множества R^μ в множество R^ν с матрицей B, то

* Все координаты вектора $e_s^{(\lambda)} \in R^\lambda$ равны нулю, кроме s-й координаты, которая равна единице.

сложное отображение $\mathbf{B}\circ\mathbf{A}$ есть линейное отображение множества R^λ в множество R^ν, матрица которого равна $B\cdot A$.

С каждой квадратной матрицей A (и тем самым, с каждым линейным отображением пространства R^λ в себя) можно связать число, называемое определителем матрицы A.

Предложение 4. Существует единственная (конечная) функция D_λ, заданная на произведении

$$\underbrace{R^\lambda \times \ldots \times R^\lambda}_{\lambda \text{ раз}}$$

и обладающая следующими свойствами:

1) $D_\lambda(e_1, e_2, \ldots, e_\lambda) = 1$, где $e_j = \left(0, 0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0\right)$, $j \in \mathbf{N}_\lambda$;

2) $D_\lambda\left(v_1, v_2, \ldots, \underbrace{\alpha v + \beta w}_{s}, \ldots, v_\lambda\right) = \alpha D_\lambda\left(v_1, v_2, \ldots\right.$ $\left.\ldots, \underset{s}{v}, \ldots, v_\lambda\right) + \beta D_\lambda\left(v_1, v_2, \ldots, \underset{s}{w}, \ldots, v_\lambda\right)$,

каковы бы ни были α, $\beta \in R$, $v_1, \ldots, v_{s-1}, v_{s+1}, \ldots, v_\lambda, v$, $w \in R^\lambda$ и $s \in \mathbf{N}_\lambda$ (коротко можно описать это свойство так: функция D_λ линейна по каждому из своих аргументов);

3) $D_\lambda\left(v_1, v_2, \ldots, \underset{s}{v_s}, \underset{s+1}{v_{s+1}}, \ldots, v_\lambda\right) = -D_\lambda\left(v_1, v_2, \ldots, \underset{s}{v_{s+1}}, \underset{s+1}{v_s}, \ldots, v_\lambda\right)$, каковы бы ни были $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda \in R^\lambda$ и $s \in \mathbf{N}_{\lambda-1}$.

Определение 4. *Определителем матрицы* A: $\{a_{(i,k)}\}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda)$ называется число $D_\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_\lambda)$, где $v_s = (a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{s\lambda})$, обозначаемое символом $\det A$.

Определителем линейного отображения $\mathbf{A}$ *множества* R^λ в себя называют число $\det A$, где A — матрица отображения $\mathbf{A}$, и пишут $\det \mathbf{A} = \det A$.

Замечание 1. Рассмотрим следующую функцию D, заданную в пространстве R^{λ^2}: если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda^2})$, то положим

$$A_x = \{x_{(i-1)\lambda+k}\} \quad ((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda), \text{ где } x \in R^{\lambda^2},$$

$D(x) = \det A_x$ $(x \in R^{\lambda^2})$. Эта функция D непрерывна в R^{λ^2}. Иначе говоря, определитель есть непрерывная функция своих элементов.

Предложение 5. Если A и B — две квадратные $\lambda \times \lambda$-матрицы, то

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Теорема 4 (д. 3). *Пусть* $\mathbf{A}$ — *линейное отображение множества* R^λ *в себя. Следующие утверждения равносильны*:

1) $\mathbf{A}$ *отображает множество* R^λ *на себя;*

2) $\mathbf{A}$ *взаимнооднозначно*;

3) $\det \mathbf{A} \neq 0$;

4) *существует линейное отображение* $\mathbf{A}^{-1}$ *множества* R^λ *в себя такое, что* $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = I_{R^\lambda}$, *или* $\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = I_{R^\lambda}$.

Определение 5. Линейное отображение A множества R^λ в себя называется *обратимым*, если $\det \mathbf{A} \neq 0$. В этом случае отображение $\mathbf{A}^{-1}$ — это просто отображение, обратное к отображению $\mathbf{A}$.

Предложение 6. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — обратимые линейные отображения множества R^λ в себя. Тогда

1) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;

2) $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}$.

Нетрудно было бы дать явное выражение элементов матрицы A^{-1} через элементы матрицы A. Для наших целей, однако, достаточно следующее

Замечание 2. Пусть A — матрица $\{a_{(i,k)}\}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda)$, $\det A \neq 0$. Тогда A^{-1} есть матрица $\{b_{(i,k)}\}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda)$, $b_{(i,k)} = \frac{d_{ik}(x)}{D(x)}$, где d_{ik} — функция, непрерывная в пространстве R^{λ^2}, D — функция, рассмотренная в замечании 1, а $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda^2})$ — точка пространства R^{λ^2}, такая, что $x_{\lambda(i-1)+k} = a_{(i,k)}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda)$.

Предложение 7. Если $\mathbf{A}$ — линейное отображение множества R^λ в себя, то существует единственное линейное отображение $\mathbf{B}$ множества R^λ в себя такое, что

$$\langle \mathbf{A}x, y \rangle_\lambda = \langle x, \mathbf{B}y \rangle_\lambda,$$

каковы бы ни были векторы x, $y \in R^\lambda$.

Определение 6. Отображение $\mathbf{B}$, о котором говорится в предложении 7, называют отображением, *сопряженным* с отображением $\mathbf{A}$, и обозначают так: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$.

Предложение 8. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные отображения множества R^λ в себя. Тогда

1) $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^* = \mathbf{B}^* \circ \mathbf{A}^*$;

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$;

3) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$;

4) если $\mathbf{A}$ — обратимое отображение, то $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$;

5) если $\{a_{(i,k)}\}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda)$ — матрица отображения $\mathbf{A}$, а $\{a^*_{(i,k)}\}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda)$ — матрица отображения A^*, то

$$a^*_{(i,k)} = a_{(k,i)}$$

при любом индексе $(i, k) \in \mathbf{N}_\lambda \times \mathbf{N}_\lambda$.

Определение 7. Линейное отображение $\mathbf{A}$ множества R^λ в себя называется *симметричным*, если $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$. Симметричное отображение называется *положительным*, если $\langle Ax, x \rangle_\lambda > 0$ при любом $x \in R^\lambda$, $x \neq 0$.

Определение 8. Линейное отображение $\mathbf{U}$ пространства R^λ в себя называется *ортогональным*, если $\|\mathbf{U}(x)\|_\lambda = \|x\|_\lambda$ при всех $x \in R^\lambda$.

Пусть $\mathbf{U}$ — линейное отображение пространства R^λ в себя.

Предложение 9. Следующие утверждения равносильны:

1) $\mathbf{U}$ — ортогональное отображение пространства R^λ в себя;

2) $\langle \mathbf{U}(x), \mathbf{U}(y)\rangle_\lambda = \langle x, y\rangle_\lambda$ при любых $x, y \in R^\lambda$;

3) $\mathbf{U}$ — обратимое линейное отображение и $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$.

Легко показать, что абсолютная величина определителя ортогонального отображения равна единице.

Определение 9. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ — вещественные числа. Отображение $\mathbf{D}$ пространства R^λ в себя, заданное равенством

$$\mathbf{D}((x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)) = (c_1x_1, c_2x_2, \ldots, c_\lambda x_\lambda)$$
$$((x_1, x_2, \ldots, x_\lambda) \in R^\lambda),$$

называется *диагональным*, а числа $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ — *собственными числами отображения* $\mathbf{D}$.

Этот термин связан с тем, что все элементы матрицы диагонального отображения, кроме элементов, стоящих на диагонали, равны нулю:

$$a_{(i,k)} = 0 \text{ при } i \neq k, \quad a_{kk} = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Частным случаем диагонального отображения является отображение подобия (или гомотетии) с коэффициентом $c \in R$. Так называют отображение, которое каждому вектору $x \in R^\lambda$ ставит в соответствие вектор cx.

Теорема 5 (д. 3). *Если* $\mathbf{A}$ — *симметричное отображение множества* R^λ *в себя, то существуют ортогональное отображение* $\mathbf{U}$ *и диагональное отображение* $\mathbf{D}$ *множества* R^λ *в себя, такие, что*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{U}^{-1}.$$

Если отображение $\mathbf{A}$ *положительно, то все собственные числа отображения* $\mathbf{D}$ *положительны.*

Предложение 10. Пусть $\mathbf{A}$ — обратимое отображение множества R^λ в себя. Тогда существуют ортогональные отображения $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и диагональное отображение $\mathbf{D}$ множества R^λ в себя, такие, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{V}$$

и все собственные числа отображения $\mathbf{D}$ положительны.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}$. Это отображение симметрично: $(\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A})^* = \mathbf{A}^* \circ (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}$ и положительно. В самом деле,

$$\langle (\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A})(x), x\rangle_\lambda = \langle \mathbf{A}(x), \mathbf{A}(x)\rangle_\lambda = \|\mathbf{A}(x)\|_\lambda^2 \geqslant 0 \quad (x \in R^\lambda).$$

Если бы при каком-нибудь $x \in R^\lambda$, $x \neq 0$, правая часть последнего равенства равнялась нулю, то это значило бы, что образы двух различных векторов x и 0 множества R^λ при отображении $\mathbf{A}$ совпадают, т. е. что отображение $\mathbf{A}$ не взаимнооднозначно. Но это противоречит обратимости отображения $\mathbf{A}$ (теорема 4). Итак,

$$\langle(\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A})(x),\ x\rangle_\lambda > 0$$

при всех $x \in R^\lambda$, таких, что $x \neq 0$, и отображение $\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}$ положительно.

Значит (теорема 5),

$$\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{Q}^{-1},$$

где $\mathbf{Q}$ — ортогональное, а $\mathbf{L}$ — диагональное отображение с положительными собственными числами $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$. Пусть $\mathbf{D}$ — диагональное отображение с собственными числами

$$\sqrt{c_1},\ \sqrt{c_2},\ \ldots,\ \sqrt{c_\lambda}$$

и

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1}.$$

Проверим, что $\mathbf{B}$ — симметричное отображение:

$$\mathbf{B}^* = (\mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1})^* = (\mathbf{Q}^*)^{-1} \circ \mathbf{D}^* \circ \mathbf{Q}^* = (\mathbf{Q}^{-1})^{-1} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \\ = \mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{B}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{B} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1}) \circ (\mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ (\mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{Q}) \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \\ = \mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}$$

(ведь $\mathbf{D} \circ \mathbf{D} = \mathbf{L}$).

Покажем теперь, что отображение $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{*^{-1}} \circ \mathbf{B}$ — ортогональное. Для этого проверим, что $\mathbf{T}$ обратимо и что $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$ (предложение 9). Ясно, что

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{A}^{*^{-1}} \circ \mathbf{B})^* = \mathbf{B}^* \circ (\mathbf{A}^{*^{-1}})^* = \mathbf{B} \circ ((\mathbf{A}^*)^*)^{-1} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}^{-1};$$

в то же время

$$\mathbf{T} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{*^{-1}} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*^{-1}} \circ \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = I_{R^\lambda} \circ I_{R^\lambda} = I_{R^\lambda},$$

т. е. $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}$.

Теперь заметим, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{*^{-1}} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{B} = \mathbf{T} \circ \mathbf{B} = \mathbf{T} \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{Q}^{-1}$. Обозначим $\mathbf{T} \circ \mathbf{Q} = \mathbf{U}$, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{V}$.

Отображение $\mathbf{U}$ ортогонально как суперпозиция двух ортогональных отображений, отображение $\mathbf{Q}^{-1}$ ортогонально как обратное к ортогональному отображению. И так как $\mathbf{A} = \mathbf{U} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{V}$, то предложение доказано.

В заключение этого пункта введем и обсудим важное понятие нормы линейного отображения. Сначала заметим, что если $\mathbf{A}$ — линейное отображение множества R^λ в множество R^ν, то функция $f_{\mathbf{A}}$, заданная на множестве R^λ равенством

$$f_{\mathbf{A}}(x) = \|\mathbf{A}(x)\|_\nu = \sqrt{\sum_{s=1}^{\nu} [a_s(x)]^2} \qquad (x \in R^\lambda),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ — координатные функции отображения $\mathbf{A}$, непрерывна, так как, очевидно, функции $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ непрерывны. Значит, по теореме Вейерштрасса (теорема 2), среди значений функции $f_{\mathbf{A}}$, принимаемых ею на единичной сфере S^λ пространства R^λ ($S^\lambda = \{x \in R^\lambda : \|x\|_\lambda = 1\}$), есть наибольшее.

Определение 10. Если $\mathbf{A}$ — линейное отображение множества R^λ в множество R^ν, то число

$$\max_{x \in S^\lambda} f_{\mathbf{A}}(x) = \max_{\|x\|_\lambda = 1} \|\mathbf{A}(x)\|_\nu$$

называется *нормой отображения* $\mathbf{A}$ и обозначается символом $\|\mathbf{A}\|$ (иногда это число называют *нормой матрицы A отображения* $\mathbf{A}$ и обозначают так: $\|A\|$).

Для того чтобы не путать норму отображения с нормой вектора, мы будем часто последнюю обозначать так: $\|x\|_\lambda$ $(x \in R^\lambda)$, сохраняя индекс λ.

Поясним понятие нормы линейного отображения $\mathbf{A}$. Если $x \in R^\lambda$, $x \neq 0$, то число $\dfrac{\|\mathbf{A}(x)\|_\nu}{\|x\|_\lambda}$ показывает, во сколько раз изменяется длина вектора x при отображении $\mathbf{A}$. Как показывает п. 1 доказываемого ниже предложения, длина всякого вектора при отображении $\mathbf{A}$ изменяется не больше, чем в $\|\mathbf{A}\|$ раз (и легко видеть, что существует вектор $x \in R^\lambda$, такой, что его длина изменяется ровно в $\|\mathbf{A}\|$ раз).

Предложение 11. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные отображения множества R^λ в множество R^ν, $\mathbf{C}$ — линейное отображение множества R^ν в множество R^μ, α — (конечное) вещественное число. Тогда

1) $\|\mathbf{A}\| = \min\{c \in R : \|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant c\|x\|_\lambda$ при всех $x \in R^\lambda\}$; в частности, $\|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant \|\mathbf{A}\|\|x\|_\lambda$ при всех $x \in R^\lambda$;

2) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$;

3) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$;

4) $\|\mathbf{C} \circ \mathbf{A}\| \leqslant \|\mathbf{C}\|\|\mathbf{A}\|$;

5) если $\{a_{(i,k)}\}$ $((i, k) \in \mathbf{N}_\nu \times \mathbf{N}_\lambda)$ — матрица отображения $\mathbf{A}$,

то

$$\|\mathbf{A}\| \leqslant \sqrt{\sum_{(i,\,k) \in \mathbf{N}_\nu \times \mathbf{N}_\lambda} a_{(i,\,k)}^2}\,.$$

Доказательство. 1) Обозначим множество $\{c \in R$: $\|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant c\|x\|_\lambda$ при всех $x \in R_\lambda\}$символом $X_\mathbf{A}$. Число $\|\mathbf{A}\|$ принадлежит множеству $X_\mathbf{A}$. В самом деле, если $x = 0$, то, очевидно, $\|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|x\|_\lambda$. Если же $x \neq 0$, то

$$\|\mathbf{A}(x)\|_\nu = \left\|\mathbf{A}\left(\|x\|_\lambda \cdot \frac{x}{\|x\|_\lambda}\right)\right\|_\nu = \left\|\|x\|_\lambda \mathbf{A}\left(\frac{x}{\|x\|_\lambda}\right)\right\|_\nu = \|x\|_\lambda \left\|\mathbf{A}\left(\frac{x}{\|x\|_\lambda}\right)\right\|_\nu .$$

Но $\frac{x}{\|x\|_\lambda} \in S^\lambda$, так что $\left\|\mathbf{A}\left(\frac{x}{\|x\|_\lambda}\right)\right\| \leqslant \|\mathbf{A}\|$ (по определению). Значит,

$$\|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|x\|_\lambda \quad (x \in R^\lambda)$$

и $\|\mathbf{A}\| \in X_\mathbf{A}$.

Если же $c \in X_\mathbf{A}$, то $\|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant c\|x\|_\lambda$ при всех $x \in R^\lambda$, в частности, при всех $x \in S^\lambda$. Поэтому $\|\mathbf{A}(x)\|_\nu \leqslant c \quad (x \in S^\lambda)$, и $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{x \in S^\lambda} \|\mathbf{A}(x)\|_\lambda \leqslant c$. Итак, $\|\mathbf{A}\| \in X_\mathbf{A}$ и $\|\mathbf{A}\| \leqslant c$ при всех $c \in X_\mathbf{A}$. Значит, $\|\mathbf{A}\| = \min X_\mathbf{A}$.

2) При любом $x \in R^\lambda$

$$\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})(x)\|_\nu = \|\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x)\|_\nu \leqslant \|\mathbf{A}(x)\|_\nu + \|\mathbf{B}(x)\|_\nu \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|x\|_\lambda + \|\mathbf{B}\|\,\|x\|_\lambda = (\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|)\,\|x\|_\lambda,$$

так что $(\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|) \in X_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, и поэтому (см. утверждение 1) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.

3) Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству утверждения 2, и мы его не приводим.

4) $\|(\mathbf{C} \circ \mathbf{A})(x)\|_\mu = \|\mathbf{C}(\mathbf{A}(x))\|_\mu \leqslant \|\mathbf{C}\| \cdot \|\mathbf{A}(x)\|_\nu = \|\mathbf{C}\|\,\|\mathbf{A}\|\,\|x\|_\lambda$ при всех $x \in R^\lambda$. Значит, $\|\mathbf{C}\|\,\|\mathbf{A}\| \in X_{\mathbf{C} \circ \mathbf{A}}$, и потому (утверждение 1) $\|\mathbf{C} \circ \mathbf{A}\| \leqslant \|\mathbf{C}\|\,\|\mathbf{A}\|$.

5) При любом $x \in R^\lambda$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$, $\|\mathbf{A}(x)\|_\nu = \|A \cdot x\|_\nu$, где A — матрица отображения $\mathbf{A}$ (предложение 1), т. е.

$$\|\mathbf{A}(x)\|_\nu = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\lambda} a_{(i,\,k)} x_k\right)^2}\,.$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского (утверждение 5, предл. 1, п. 2)

$$\left(\sum_{k=1}^{\lambda} a_{(i,\,k)} x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\lambda} a_{(i,\,k)}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\lambda} x_k^2\right) \quad (i \in \mathbf{N}_\nu).$$

Поэтому

$$\|A(x)\|_\nu \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}\left[\left(\sum_{k=1}^{\lambda} a^2_{(i,k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{\lambda} x_k^2\right)\right]} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}\left[\left(\sum_{k=1}^{\lambda} a^2_{(i,k)}\right)\cdot\|x\|^2_\lambda\right]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}\left(\sum_{k=1}^{\lambda} a^2_{(i,k)}\right)}\cdot\|x\|_\lambda =$$

$$= \sqrt{\sum_{(i,k)\in N_\nu\times N_\lambda} a^2_{(i,k)}}\ \|x\|_\lambda.$$

Значит, $\sqrt{\sum_{(i,k)\in N_\nu\times N_\lambda} a^2_{(i,k)}} \in X_A$, и доказательство заканчивается ссылкой на утверждение 1.

Разумеется, было бы желательно уметь точно выражать норму линейного отображения через элементы его матрицы. Однако никакого обозримого выражения такого типа не существует. Для наших целей вполне достаточно неравенства, доказанного в утверждении 5 предложения.

Следствие. $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \geqslant |\|\mathbf{A}\|-\|\mathbf{B}\||$.

Доказательство.

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}+(\mathbf{A}-\mathbf{B})\| \leqslant \|\mathbf{B}\|+\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|;$$

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}+(\mathbf{B}-\mathbf{A})\| \leqslant \|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|;$$

$$\|\mathbf{A}\|-\|\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|;\quad -(\|\mathbf{A}\|-\|\mathbf{B}\|) \leqslant \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|.$$

Следствие доказано.

В этом пункте речь шла о линейных отображениях. Иногда нам будет полезно несколько более общее понятие.

Определение 11. Отображение $\mathbf{A}$ множества R^ν в множество R^λ называется *аффинным*, если существует такой вектор $y_0 \in R^\lambda$ и такое линейное отображение $\mathbf{L}$ множества R^ν в множество R^λ, что

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{L}(x) + y_0 \quad (x \in R^\nu).$$

Ясно, что такие вектор y_0 и отображение $\mathbf{L}$ единственны: $y_0 = \mathbf{A}(0)$, $\mathbf{L}(x) = \mathbf{A}(x) - \mathbf{A}(0)$. Поэтому можно говорить об *определителе аффинного отображения* $\mathbf{A}$, имея в виду определитель $\det \mathbf{L}$.

7. Перейдем к дифференциальному исчислению в пространстве R^ν. Основная цель дифференциального исчисления, грубо говоря, состоит в следующем: научиться находить аффинное отображение, близкое к наперед заданному отображению Φ некоторого множества $E \subset R^\lambda$ в пространство R^ν. Вообще говоря, эта цель недостижима, если искать аффинное отображение, близкое к отображению Φ во всех точках множества E. Но зато этой цели вполне можно достичь для широкого класса отображений Φ, если зафиксировать любую точку x множества E

и искать аффинное отображение, мало отличающееся от Φ во всех точках достаточно малой окрестности точки x.

Перейдем к точным формулировкам.

Определение 1. Пусть Φ — отображение открытого множества G пространства R^λ в пространство R^ν и пусть $x_0 \in G$. Если существует такое линейное отображение $\mathbf{A}$ множества R^λ в множество R^ν, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| \Phi(x) - \Phi(x_0) - \mathbf{A}(x - x_0) \|_\nu}{\| x - x_0 \|_\lambda} = 0, \tag{1}$$

то говорят, что отображение Φ *дифференцируемо в точке* x_0, отображение $\mathbf{A}$ называют *дифференциалом отображения* Φ *в точке* x_0 и пишут:

$$\mathbf{A} = d_{x_0}\Phi.$$

Предположим, что отображение Φ дифференцируемо в точке $x_0 \in G$. Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(x) - \Phi(x_0) - (d_{x_0}\Phi)(x - x_0)}{\| x - x_0 \|_\lambda} & (x \in G \setminus \{x_0\}), \\ 0 & (x = x_0). \end{cases}$$

Тогда при всех $x \in G$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + (d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \| x - x_0 \|_\lambda \alpha(x). \tag{2}$$

Это равенство означает, что если вектор $\Phi(x)$ заменить вектором $\Phi(x_0) + (d_{x_0}\Phi)(x - x_0)$ (который, очевидно, представляет собою образ вектора x при аффинном отображении), то норма возникающей при этом ошибки ($\| x - x_0 \|_\lambda \cdot \alpha(x)$) стремится к нулю, когда x стремится к x_0, и притом быстрее, чем расстояние $\rho_\lambda(x, x_0) = \| x - x_0 \|_\lambda$ (ведь $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$!).

Замечание 1. Если отображение Φ дифференцируемо в точке $x_0 \in G$, то оно имеет ровно один дифференциал в точке x_0.

Доказательство. Пусть линейное отображение $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (1) и пусть тому же условию удовлетворяет линейное отображение $\mathbf{B}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| \Phi(x) - \Phi(x_0) - \mathbf{B}(x - x_0) \|_\nu}{\| x - x_0 \|_\lambda} = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| \mathbf{A}(x - x_0) - \mathbf{B}(x - x_0) \|_\nu}{\| x - x_0 \|_\lambda} = 0,$$

т. е. каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\| \mathbf{A}(x - x_0) - \mathbf{B}(x - x_0) \|_\nu \leqslant \varepsilon \| x - x_0 \|_\lambda$$

при всех $x \in G$, таких, что $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$. Число δ можно считать столь малым, что $D^\lambda(x_0, \delta) \subset G$ (ведь G — открытое множество). Если $y \in R^\lambda$ и $y \neq 0$, то $x_0 + \frac{\delta y}{\|y\|_\lambda} \in \overline{D^\lambda(x_0, \delta)} \subset G$ и

$$\left\|\mathbf{A}\left(\frac{\delta y}{\|y\|_\lambda}\right) - \mathbf{B}\left(\frac{\delta y}{\|y\|_\lambda}\right)\right\|_\nu \leqslant \varepsilon \left\|\frac{\delta y}{\|y\|_\lambda}\right\|_\lambda,$$

т. е.

$$\left\|\mathbf{A}\left(\frac{\delta y}{\|y\|_\lambda}\right) - \mathbf{B}\left(\frac{\delta y}{\|y\|_\lambda}\right)\right\|_\nu = \left\|(\mathbf{A} - \mathbf{B})\left(\frac{\delta y}{\|y\|_\lambda}\right)\right\|_\nu \leqslant \varepsilon \frac{\delta}{\|y\|_\lambda} \|y\|_\lambda.$$

Иначе говоря, при всех $y \in R^\lambda$

$$\|(\mathbf{A} - \mathbf{B})(y)\|_\nu \leqslant \varepsilon \|y\|_\lambda,$$

каково бы ни было число $\varepsilon > 0$. Значит, $\|\mathbf{A}(y) - \mathbf{B}(y)\|_\nu = 0$ $(y \in R^\lambda)$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Замечание 2. Если $\mathbf{A}$ — линейное отображение множества R^λ в множество R^ν, то $\mathbf{A}$ дифференцируемо в любой точке $x_0 \in R^\lambda$ и $d_{x_0}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ $(x_0 \in R^\lambda)$. В самом деле,

$$\mathbf{A}(x) - \mathbf{A}(x_0) - \mathbf{A}(x - x_0) = 0$$

при всех $x \in R^\lambda$, так что равенство (1) (с $\Phi = \mathbf{A}$) выполнено тривиальным образом.

Замечание 3. Если отображение Φ дифференцируемо в точке $x_0 \in G$, то оно непрерывно в этой точке.

Доказательство. Точка x_0, очевидно, есть точка сгущения множества G, и потому достаточно проверить, что $\lim\limits_{x \to x_0} \Phi(x) = \Phi(x_0)$ (определение 5, п. 3). Но ведь

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = \Phi(x_0) + \lim_{x \to x_0} (d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} \|x - x_0\| \cdot \alpha(x) = \Phi(x_0).$$

Постараемся теперь найти достаточно простые условия, обеспечивающие дифференцируемость отображения Φ в точке x_0.

С этой целью обратимся сначала к отображениям в множество R, т. е. просто к числовым функциям.

Определение 2. Пусть f — (конечная) функция, заданная в открытом множестве G пространства R^λ, $x_0 \in G$, $v \in R^\lambda$, $\|v\|_\lambda = 1$. Предположим, что σ — столь малое положительное число, что

$$D^\lambda(x_0, \sigma) \subset G.$$

Рассмотрим функцию φ_{x_0}, заданную на множестве

$$(-\sigma, \sigma) \setminus \{0\} \subset R$$

равенством

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t} \quad (-\sigma < t < \sigma, \ t \neq 0).$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{t \to 0} \varphi_{x_0}(t),$$

то говорят, что функция f имеет в точке x_0 *производную по направлению* v, равную $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_{x_0}(t)$. Эта производная обозначается так:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0).$$

Если $v=e_s^\lambda\ (s\in\mathbf{N}_\lambda)$ $\left(e_s^\lambda=\left(0,\ldots,\underset{s}{1},\ldots,0\right)\right)$, то вместо $\frac{\partial f}{\partial e_s^\lambda}(x_0)$ пишут $\frac{\partial f}{\partial x_s}(x_0)$ или $D^{(s)}f(x_0)$; производную по направлению e_s^λ называют *частной производной функции f по s-й координате*.

Можно дать иное определение частной производной по s-й координате, равносильное только что данному.

Определение 3. Пусть f, G, x_0 и σ обозначают то же, что в определении 2, пусть $x_0=\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_\lambda^{(0)}\right)$, s — натуральное число, $s\leqslant\lambda$.

Рассмотрим функцию F_s, заданную на промежутке $\left(x_s^{(0)}-\sigma,\ x_s^{(0)}+\sigma\right)$ следующим образом:

$$F_s(t)=f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_{s-1}^{(0)}, t, x_{s+1}^{(0)},\ldots,x_\lambda^{(0)}\right)$$
$$\left(t\in\left(x_s^{(0)}-\sigma,\ x_s^{(0)}+\sigma\right)\right).$$

Предположим, что функция F_s имеет в точке $x_s^{(0)}$ конечную производную $F_s'\left(x_s^{(0)}\right)$. Число $F_s'\left(x_s^{(0)}\right)$ называют *частной производной функции f по s-й координате в точке x_0*.

Доказательство равносильности двух определений частной производной по s-й координате представляем читателю.

Предложение 1. Допустим, что функция f, заданная по крайней мере в открытом λ-мерном шаре $D^\lambda(x_0,\delta)$, в каждой точке x этого шара имеет частные производные по всем координатам:

$$D^{(1)}f(x),\ D^{(2)}f(x),\ \ldots,\ D^{(\lambda)}f(x),$$

и что функции $D^{(1)}f$, $D^{(2)}f,\ldots,D^{(\lambda)}f$ непрерывны в точке x_0. Тогда функция f дифференцируема в точке x_0.

Доказательство. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)$ — какая-нибудь точка шара $D^\lambda(x_0,\sigma)$ и пусть $x_0=\left(x_1^{(0)},\ldots,x_\lambda^{(0)}\right)$. Легко понять, что

$$\begin{aligned}
f(x)-f(x_0)&=f(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_\lambda^{(0)}\right)=\\
&=f(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)-f\left(x_1^{(0)},x_2,x_3,\ldots,x_\lambda\right)+\\
&+f\left(x_1^{(0)},x_2,x_3,\ldots,x_\lambda\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3,\ldots,x_\lambda\right)+\\
&+f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3,\ldots,x_\lambda\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)},x_4,\ldots,x_\lambda\right)+\\
&+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +\\
&+f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_{\lambda-1}^{(0)},x_\lambda\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_\lambda^{(0)}\right).
\end{aligned}$$

Пусть теперь t — любое число, принадлежащее замкнутому промежутку с концами x_1, $x_1^{(0)}$ (пусть, например, $x_1 < x_1^{(0)}$). Тогда $(t, x_2, \ldots, x_\lambda) \in D^\lambda(x_0, \sigma)$. Положим $F_1(t) = f(t, x_2, \ldots, x_\lambda)$. Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda) - f(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_\lambda) = F_1(x_1) - F_1(x_1^{(0)}).$$

Но функция F_1 в любой точке t промежутка $[x_1, x_1^{(0)}]$ имеет конечную производную $F_1'(t) = D^{(1)}f(t, x_2, \ldots, x_\lambda)$. Поэтому по теореме Лагранжа о среднем можно найти число $t_1(x)$, расположенное между числами x_1 и $x_1^{(0)}$, такое, что

$$F_1(x_1) - F_1(x_1^{(0)}) = F_1'(t_1(x))(x_1 - x_1^{(0)}),$$

т. е.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda) - f(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_\lambda) = D^{(1)}f(t_1(x), x_2, \ldots, x_\lambda)(x_1 - x_1^{(0)}).$$

Вводя функцию F_2, заданную на промежутке с концами x_2, $x_2^{(0)}$:

$$F_2(t) = f(x_1^{(0)}, t, x_3, \ldots, x_\lambda),$$

убедимся точно так же в том, что в упомянутом промежутке найдется точка $t_2(x)$ такая, что

$$f(x_1^{(0)}, x_2, x_3, \ldots, x_\lambda) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3, \ldots, x_\lambda) = D^{(2)}f(x_1^{(0)}, t_2(x), x_3, \ldots, x_\lambda)(x_2 - x_2^{(0)}).$$

Рассуждая точно так же, мы убедимся в том, что существуют точки $t_1(x)$, $t_2(x), \ldots, t_\lambda(x)$ такие, что $t_j(x)$ принадлежит промежутку с концами x_j, $x_j^{(0)}$ и

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{\lambda} D^{(j)}f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{j-1}^{(0)}, t_j(x), x_{j+1}, \ldots, x_\lambda)(x_j - x_j^{(0)}). \tag{3}$$

Положим

$$\alpha_j(x) = D^{(j)}f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{j-1}^{(0)}, t_j(x), x_{j+1}, \ldots, x_\lambda) - D^{(j)}f(x_0)$$
$$(j \in \mathrm{N}_\lambda,\ x \in D^\lambda(x_0, \sigma)).$$

Проверим, что $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_j(x) = 0$ $(j \in \mathrm{N}_\lambda)$. Для этого воспользуемся тем, что по условию функция $D^{(j)}f$ непрерывна в точке x_0. Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек шара $D^\nu(x_0, \sigma)$, стремящуюся к точке x_0, и пусть $y_n = (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_\lambda^{(n)})$. Тогда (предл. 1 п. 3)

$$\lim_{n \to \infty} y_s^{(n)} = x_s^{(0)} \quad (s = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Но $t_j(y_n)$ содержится в промежутке с концами $y_j^{(n)}$, $x_j^{(0)}$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} t_j(y_n)=x_j^{(0)}$ $(j\in N_\lambda)$, и потому

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_j(y_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} D^{(j)}f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{j-1}^{(0)}, t_j(y_n), y_{j+1}^{(n)}, \ldots, y_\lambda^{(n)})-D^{(j)}f(x_0)=0$$

(так как частные производные непрерывны в точке x_0).

Наконец, заменим в равенстве (3)

$D^{(j)}f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots t_j(x), \ldots, x_\lambda)$ на $D^{(j)}f(x_0)+\alpha_j(x)$.

Тогда получим

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{j=1}^{\lambda} D^{(j)}f(x_0)\cdot(x_j-x_j^{(0)})+$$

$$+\sum_{j=1}^{\lambda} \alpha_j(x)\cdot(x_j-x_j^{(0)})=\langle k(x_0), (x-x_0)\rangle_\lambda+$$

$$+\sum_{j=1}^{\lambda} \alpha_j(x)\cdot(x_j-x_j^{(0)}),$$

где $k(x_0)$ — вектор $(D^{(1)}f(x^0), D^{(2)}f(x_0), \ldots, D^{(\lambda)}f(x_0))$.

Теперь заметим, что, во-первых,

$$\frac{|f(x)-f(x)-\langle k(x_0), (x-x_0)\rangle_\lambda|}{\|x-x_0\|_\lambda}=$$

$$=\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{\lambda} \alpha_j(x)\cdot(x_j-x_j^{(0)})\right|}{\|x-x_0\|_\lambda}\leqslant\frac{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\lambda}[\alpha_j(x)]^2\cdot\|x-x_0\|_\lambda}}{\|x-x_0\|_\lambda}=$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{\lambda}[\alpha_j(x)]^2}\quad (x\in D^\lambda(x_0, \sigma),\ x\neq x_0),$$

и потому $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\langle k(x_0), (x-x_0)\rangle_\lambda}{\|x-x_0\|_\lambda}=0;$$

во-вторых, отображение множества R^λ в R^1, сопоставляющее вектору $x\in R^\lambda$ число $\langle k(x_0), x\rangle$, линейно (предл. 1 п. 2).

Все сказанное и означает, что функция f дифференцируема в точке x_0.

Предложение доказано.

Определение 4. Пусть Φ — отображение открытого множества G пространства R^λ в пространство R^ν и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ — координатные функции отображения Φ. Если при любом $x\in G$ существуют частные производные $D^{(j)}\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu,\ j=1, 2, \ldots, \lambda)$ и если функции $D^{(j)}\varphi_i$ $(i=1, 2, \ldots, \nu,\ j=1, 2, \ldots, \lambda)$ непрерывны в G, то отображение Φ называют *гладким*.

Матрица $\{D^{(j)}\varphi_i(x)\}$ $((i, j)\in \mathbf{N}_\nu\times\mathbf{N}_\lambda)$ $(x\in G)$ называется *матрицей Якоби отображения* Φ *в точке* $x\in G$. Эту матрицу мы будем обозначать символом $\Phi'(x)$. Определитель $\det\Phi'(x)$ матрицы Якоби при $\nu=\lambda$ называют *якобианом отображения* Φ *в точке* x.

Предложение 2. Если Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^λ в множество R^ν, то Φ дифференцируемо в любой точке $x_0\in G$, и при любом $x\in G$ матрицей линейного отображения $d_{x_0}\Phi$ служит матрица Якоби $\Phi'(x_0)$.

Доказательство. Из предложения 1 следует, что при любом $i\in\mathbf{N}_\nu$ координатная функция φ_i дифференцируема во всякой точке $x_0\in G$. Поэтому, какова бы ни была точка $x_0\in G$, существуют функции $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, заданные в G и такие, что

$$\varphi_i(x)-\varphi_i(x_0)=\sum_{j=1}^{\lambda} D^{(j)}\varphi_i(x_0)\cdot\left(x_j-x_j^{(0)}\right)+$$
$$+\|x-x_0\|_\lambda\cdot\alpha_i(x)\quad(x\in G,\ i\in\mathbf{N}_\nu)$$

и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x)=0$ $(i\in\mathbf{N}_\nu)$. Но это значит, что вектор $\Phi(x)-\Phi(x_0)$ равен

$$\Phi'(x)\cdot(x-x_0)+\|x-x_0\|_\lambda\,\alpha(x),\ \text{где}\ \alpha(x)=$$
$$=(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_\nu(x)),$$

причем, очевидно (предл. 3 п. 3), $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Но это и значит, что отображение Φ дифференцируемо в точке x_0, и

$$(d_{x_0}\Phi)(x)=\Phi'(x_0)\cdot x\quad\left(x\in R^\nu\right).$$

Рассмотрим частный случай этого предложения: предположим, что $\nu=1$. Тогда матрица Якоби $\Phi'(x)$ состоит из одной строки, т. е. представляет собою вектор $\left(D^{(1)}\Phi(x), D^{(2)}\Phi(x), \ldots\right.$ $\left.\ldots D^{(\lambda)}\Phi(x)\right)$.

Определение 5. Вектор $\left(D^{(1)}\Phi(x), D^{(2)}\Phi(x), \ldots\right.$ $\left.\ldots, D^{(\lambda)}\Phi(x)\right)$ называют *градиентом функции* Φ в точке $x\in G$ и обозначают так: $\operatorname{grad}\Phi(x)$.

Последнее предложение в случае $\nu=1$ показывает, что $(d_x\Phi)(h)$ при любом $h\in R^\lambda$ и $x\in G$ есть число, равное скалярному произведению $\langle\operatorname{grad}\Phi(x), h\rangle$.

Предложение 3. Предположим, что Φ — гладкая функция, заданная в открытом множестве G пространства R^λ. Если $x^*\in G$ и $\Phi(x^*)\leqslant\Phi(x)$ при всех $x\in G$, то $\operatorname{grad}\Phi(x^*)=0$.

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть $\operatorname{grad}\Phi(x^*)\neq 0$. Положим $v=\dfrac{\operatorname{grad}\Phi(x^*)}{\|\operatorname{grad}\Phi(x^*)\|_\lambda}$. Тогда если $t\in R$, то

$$\Phi(x^*+tv)=\Phi(x^*)+(d_{x^*}\Phi)(tv)+\alpha(tv)\|tv\|_\lambda =$$
$$=\Phi(x^*)+\langle \operatorname{grad}\Phi(x^*),\ tv\rangle_\lambda+\alpha(tv)\|tv\|_\lambda =$$
$$=\Phi(x^*)+t\|\operatorname{grad}\Phi(x^*)\|_\lambda+\alpha(tv)\cdot|t|\cdot\|v\|_\lambda$$

при всех достаточно малых t; $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(tv)=0$. Поэтому найдется такое число $\delta>0$, что при всех t, удовлетворяющих неравенству $|t|<\delta$, выполнено неравенство $|\alpha(tv)|\cdot\|v\|_\lambda<\|\operatorname{grad}\Phi(x^*)\|_\lambda$. Если $t<0$, $|t|<\delta$, то

$$\Phi(x^*+tv)=\Phi(x^*)+t(\|\operatorname{grad}\Phi(x^*)\|_\lambda-\alpha(tv)\cdot\|v\|_\lambda)<\Phi(x^*),$$

что противоречит условию.

Предложение доказано.

Предложение 4. Предположим, что Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^λ в пространство R^ν. Рассмотрим функцию Γ, заданную на множестве G следующим образом:

$$\Gamma(x)=\|d_x\Phi\|=\|\Phi'(x)\| \quad (x\in G),$$

где $\|d_x\Phi\|$ — норма отображения $d_x\Phi$ (определение 10 п. 6). Функция Γ непрерывна в G.

Доказательство. Пусть $x,\ y\in G$. Ясно, что

$$\Phi'(x)-\Phi'(y)=\{D^{(j)}\varphi_i(x)-D^{(j)}\varphi_i(y)\} \quad ((i,j)\in \mathrm{N}_\nu\times\mathrm{N}_\lambda).$$

Поэтому (см. предл. 11 п. 6 и следствие к нему)

$$|\Gamma(x)-\Gamma(y)|\leqslant\|\Phi'(x)-\Phi'(y)\|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{(i,j)\in \mathrm{N}_\nu\times\mathrm{N}_\lambda}[D^{(j)}\varphi_i(x)-D^{(j)}\varphi_i(y)]^2}\,.$$

Остается воспользоваться непрерывностью частных производных $D^{(j)}\varphi_i$ $(i\in\mathrm{N}_\nu,\ j\in\mathrm{N}_\lambda)$.

Предложение доказано.

Предложение 5. Допустим, что Φ удовлетворяет всем условиям предыдущего предложения, $\nu=\lambda$, и пусть K — ограниченное множество, содержащееся в G вместе со своей границей. Если $\det\Phi'(x)\neq 0$ при всех $x\in\overline{K}$, где $\overline{K}=K\cup\partial K$ (замыкание множества K), то существует число $c>0$ такое, что

$$\|\Phi'(x)\cdot h\|_\lambda\geqslant c\|h\|_\lambda$$

при всех $h\in R^\lambda$ и всех $x\in\overline{K}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E\subset R^{2\lambda}$, состоящее из всех точек $z=(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda,y_1,\ldots,y_\lambda)$, таких, что $(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)\in\overline{K}$, $\|(y_1,y_2,\ldots,y_\lambda)\|_\lambda=1$. Легко проверить, что E — ограниченное и замкнутое множество пространства $R^{2\lambda}$.

Пусть функция H задана на множестве E следующим образом: $H(z)=\|\Phi'(x)y\|_\lambda$ $(z\in E,\ z=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\lambda,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\lambda),$
$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\lambda),\ y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\lambda)).$$

Функция H, как легко проверить, непрерывна на множестве E:
$$|H(z)-H(\tilde{z})|=|\|\Phi'(y)y\|_\lambda-\|\Phi'(\tilde{x})\tilde{y}\|_\lambda|\leqslant$$
$$\leqslant\|\Phi'(x)\cdot y-\Phi'(\tilde{x})\cdot\tilde{y}\|_\lambda\leqslant\|\Phi'(x)y-\Phi'(x)\cdot\tilde{y}\|_\lambda+$$
$$+\|\Phi'(x)\cdot\tilde{y}-\Phi'(\tilde{x})\cdot\tilde{y}\|_\lambda\leqslant\|\Phi'(x)\|\|y-\tilde{y}\|_\lambda+$$
$$+\|\Phi'(x)-\Phi'(\tilde{x})\|\|\tilde{y}\|_\lambda$$
при всех $z,\ \tilde{z}\in E$ $(z=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\lambda,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\lambda),\ \tilde{z}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_\lambda,\ \tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ \ldots,\ \tilde{y}_\lambda),$ $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\lambda),$ $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_\lambda),\ y=(y_1,\ \ldots,\ y_\lambda),\ \tilde{y}=(\tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_\lambda))$. Но $\|\Phi'(x)\|=\Gamma(x)\leqslant\sup\limits_{x\in\overline{K}}\Gamma(x)<+\infty$ (см. предыдущее предложение), $\|\tilde{y}\|_\lambda=1$. Поэтому (см. предл. 11 п. 6)
$$|H(z)-H(\tilde{z})|\leqslant\sup_{x\in\overline{K}}\Gamma(x)\cdot\|y-\tilde{y}\|_\lambda+$$
$$+\sqrt{\sum_{(i,\,j)\in N_\lambda\times N_\lambda}[D^{(j)}\varphi_i(x)-D^{(j)}\varphi_i(\tilde{x})]^2}\quad(z,\ \tilde{z}\in E).$$

Из этого неравенства легко следует непрерывность функции H на множестве E.

Вместе с тем $H(z)>0$ при любом $z\in E$, ибо в противном случае оказалось бы, что
$$\Phi'(x)\cdot y=0$$
при некотором $x\in\overline{K}$ и $y\neq 0$ $(\|y\|_\lambda=1)$, что противоречит условию $\det\Phi'(x)\neq 0$ при всех $x\in\overline{K}$ (теорема 4). Среди значений непрерывной на ограниченном замкнутом множестве E функции H есть наименьшее. Обозначим его буквой c; очевидно, $c>0$. Итак, $\|\Phi'(x)\cdot y\|_\lambda\geqslant c$ при всех $x\in\overline{K}$ и $y\in R^\lambda$, $\|y\|_\lambda=1$. Если $h\in R^\lambda$, $h\neq 0$, то пусть $y=\frac{h}{\|h\|_\lambda}$. Тогда $\|y\|_\lambda=1$ и
$$\|\Phi'(x)\cdot y\|_\lambda=\left\|\Phi'(x)\cdot\frac{h}{\|h\|_\lambda}\right\|_\lambda\geqslant c,$$
т. е. $\|\Phi'(x)\cdot h\|_\lambda\geqslant c\|h\|_\lambda$. При $h=0$ это неравенство очевидно.

Предложение доказано.

В следующем предложении даны правила дифференцирования линейной комбинации отображений и сложного отображения.

Предложение 6. 1) Пусть Φ_1 и Φ_2 — отображения открытого множества G пространства R^λ в пространство R^ν, дифференцируемые в точке $x_0 \in G$, а t_1 и t_2 — конечные вещественные числа. Тогда отображение $t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2$ (см. определение 6 п. 3) тоже дифференцируемо в точке x_0 и

$$d_{x_0}(t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2) = t_1 d_{x_0}\Phi_1 + t_2 d_{x_0}\Phi_2,$$

$$(t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2)'(x_0) = t_1\Phi_1'(x_0) + t_2\Phi_2'(x_0).$$

2) Пусть Φ — отображение открытого множества G пространства R^λ в открытое множество G^* пространства R^μ, а Ψ — отображение, заданное по крайней мере на множестве G^* со значениями в множестве R^ν. Если $x_0 \in G$, отображение Φ дифференцируемо в точке x_0, а отображение Ψ дифференцируемо в точке $\Phi(x_0)$, то сложное отображение $\Psi\circ\Phi$ дифференцируемо в точке x_0 и

$$d_{x_0}(\Psi\circ\Phi) = \left(d_{\Phi(x_0)}\Psi\right)\circ(d_{x_0}\Phi), \tag{4}$$

$$(\Psi\circ\Phi)'(x_0) = \Psi'(\Phi(x_0))\cdot\Phi'(x_0). \tag{5}$$

Доказательство. 1) Из определения дифференцируемости (см. равенство (2)) следует, что существуют два отображения α_1, α_2 множества G в множество R^ν, такие, что при всех $x \in G$

$$\Phi_j(x) = \Phi_j(x_0) + (d_{x_0}\Phi_j)(x - x_0) + \|x - x_0\|_\lambda\cdot\alpha_j(x) \quad (j = 1,\ 2)$$

и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_2(x) = 0$. В таком случае при любом $x \in G$

$$\begin{aligned}(t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2)(x) = t_1\Phi_1(x) + t_2\Phi_2(x) = t_1\Phi_1(x_0) + t_2\Phi_2(x_0) &+\\ + t_1(d_{x_0}\Phi_1)(x - x_0) + t_2(d_{x_0}\Phi_2)(x - x_0) &+\\ + \|x - x_0\|_\lambda(t_1\alpha_1(x) + t_2\alpha_2(x)).&\end{aligned}$$

Принимая во внимание линейность отображения $t_1 d_{x_0}\Phi_1 + t_2 d_{x_0}\Phi_2$ и тот факт, что $\lim\limits_{x\to x_0}(t_1\alpha_1(x) + t_2\alpha_2(x)) = 0$, заключаем, что отображение $t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2$ дифференцируемо в точке x_0 и

$$d_{x_0}(t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2) = t_1 d_{x_0}\Phi_1 + t_2 d_{x_0}\Phi_2. \tag{6}$$

Равенство матриц $(t_1\Phi_1 + t_2\Phi_2)'(x_0)$ и $t_1\Phi_1'(x_0) + t_2\Phi_2'(x_0)$ следует теперь из равенства (6) и предложения 2 п. 6.

2) По условию существуют отображения α и β, заданные соответственно в множествах G и G^*, такие, что

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = (d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \|x - x_0\|_\lambda\,\alpha(x) \tag{7}$$

при всех $x \in G$,

$$\Psi(x) = \Psi(\Phi(x_0)) + (d_{\Phi(x_0)}\Psi)(x - \Phi(x_0)) + \|x - \Phi(x_0)\|_\mu\cdot\beta(x)$$

при всех $x \in G^*$ и

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \to \Phi(x_0)} \beta(x) = 0.$$

Обозначим сложное отображение $\Psi \circ \Phi$ символом F. Тогда при любом $x \in G$

$$F(x) = \Psi(\Phi(x_0)) + (d_{\Phi(x_0)}\Psi)(\Phi(x) - \Phi(x_0)) + \\ + \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_\mu \beta(\Phi(x)) = F(x_0) + (d_{\Phi(x_0)}\Psi)(\Phi(x) - \Phi(x_0)) + \\ + \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_\mu \beta(\Phi(x)).$$

Заменяя в этом равенстве $\Phi(x) - \Phi(x_0)$ правой частью равенства (7), получим

$$F(x) = F(x_0) + (d_{\Phi(x_0)}\Psi)[(d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)] + \\ + \|(d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu \cdot \beta(\Phi(x)) = \\ = F(x_0) + [(d_{\Phi(x_0)}\Psi) \circ (d_{x_0}\Phi)](x - x_0) + \\ + (d_{\Phi(x_0)}\Psi)(\|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)) + \|(d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \\ + \|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu \beta(\Phi(x)).$$

Обозначим линейное отображение $(d_{\Phi(x_0)}\Psi) \circ (d_{x_0}\Phi)$ множества R^λ в множество R^ν символом $\mathbf{A}$. Если мы докажем, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|F(x) - F(x_0) - \mathbf{A}(x - x_0)\|_\nu}{\|x - x_0\|_\lambda} = 0,$$

то дифференцируемость отображения F в точке x_0 и равенство (4) будут доказаны. Но при $x \in G$, $x \neq x_0$,

$$\frac{\|F(x) - F(x_0) - \mathbf{A}(x - x_0)\|_\nu}{\|x - x_0\|_\lambda} = \\ = \frac{\|(d_{\Phi(x_0)}\Psi)(\|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)) + \|(d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu \beta(\Phi(x))\|_\nu}{\|x - x_0\|_\lambda}.$$

Числитель этой дроби не превосходит следующей суммы (см. предл. 2 п. 1, утверждения 3 и 4):

$$\|(d_{\Phi(x_0)}\Psi)(\|x - x_0\|_\lambda \cdot \alpha(x))\|_\nu + \|(d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \\ + \|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu \cdot \|\beta(\Phi(x))\|_\nu.$$

Кроме того, согласно предложению 11 (п. 6, утверждение 1)

$$\|(d_{\Phi(x_0)}\Psi)(\|x - x_0\|_\lambda \alpha(x))\|_\nu \leqslant \|d_{\Phi(x_0)}\Psi\| \cdot \|\|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu = \\ = \|d_{\Phi(x_0)}\Psi\| \cdot \|x - x_0\|_\lambda \cdot \|\alpha(x)\|_\mu,$$

$$\|(d_{x_0}\Phi)(x - x_0) + \|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu \leqslant \|(d_{x_0}\Phi)(x - x_0)\|_\mu + \\ + \|\|x - x_0\|_\lambda \alpha(x)\|_\mu \leqslant \|d_{x_0}\Phi\| \cdot \|(x - x_0)\|_\lambda + \|x - x_0\|_\lambda \cdot \|\alpha(x)\|_\mu.$$

Окончательно получаем ($x \in G$, $x \neq x_0$):

$$\frac{\|F(x)-F(x_0)-\mathbf{A}(x-x_0)\|_\nu}{\|x-x_0\|_\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x-x_0\|_\lambda \cdot \|d_{\Phi(x_0)}\Psi\| \cdot \|\alpha(x)\|_\mu + [\|d_{x_0}\Phi\| \cdot \|x-x_0\|_\lambda + \|x-x_0\|_\lambda \cdot \|\alpha(x)\|_\mu] \, \|\beta(\Phi(x))\|_\nu}{\|x-x_0\|_\lambda} =$$

$$= \|d_{\Phi(x_0)}\Psi\| \cdot \|\alpha(x)\|_\mu + \|\beta(\Phi(x))\|_\nu \, [\|d_{x_0}\Phi\| + \|\alpha(x)\|_\mu].$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то остается проверить, что

$$\lim_{x \to x_0} \beta(\Phi(x)) = 0. \qquad (8)$$

Равенство (8) легко следует из непрерывности отображения Φ в точке x_0 (замечание 3 к определению 1) и из того, что $\lim\limits_{x \to \Phi(x_0)} \beta(x) = 0$.

Равенство (5) следует из равенства (4) и предл. 2 п. 6. Предложение доказано.

В приложениях дифференциального исчисления важную роль играет теорема Лагранжа о среднем. Эта теорема позволяет оценить сверху приращение дифференцируемой функции на промежутке, если известна верхняя граница производной этой функции. Оценка такого типа возможна и для гладких отображений.

Определение 6. Пусть x и y — точки пространства R^ν. Рассмотрим отображение φ промежутка $[0, 1]$ в множество R^ν:

$$\varphi(t) = x + ty \quad (t \in [0, 1]).$$

Множество $\varphi[[0, 1]]$ называется *прямолинейным отрезком, соединяющим точки* x и y, и обозначается символом $[x, y]$.

Предложение 7. Пусть G — открытое множество пространства R^λ, Φ — гладкое отображение множества G в пространство R^ν. Если точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_\lambda)$ принадлежат множеству G вместе с соединяющим их прямолинейным отрезком, то существует точка z, принадлежащая этому отрезку и такая, что

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu \leqslant \|(d_z\Phi)(y-x)\|_\nu. \qquad (9)$$

Замечание. Если $\nu = 1$, то неравенство (9) можно записать и так: $|\Phi(y) - \Phi(x)| \leqslant |\langle \operatorname{grad} \Phi(z), y - x \rangle|$.

Доказательство. При $t \in [0, 1]$ положим

$$F(t) = \langle \Phi(x + t(y-x)), \Phi(y) - \Phi(x) \rangle_\nu.$$

Ясно, что $F(1) - F(0) = \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu^2$. Таким образом, дело сводится к вычислению приращения числовой функции F на промежутке $[0, 1]$. Это приращение мы вычислим, пользуясь теоремой Лагранжа о среднем. Убедимся сначала в том, что функция F дифференцируема в каждой точке промежутка $(0, 1)$ и непрерывна в точках 0,1. Для этого заметим, что $F = \Psi_1 \circ \Phi \circ \Psi_2$, где Ψ_2 — отображение отрезка $[0, 1]$ в множество G, заданное равенством

$$\Psi_2(t) = x + t(y - x) \quad (t \in [0, 1]);$$

Ψ_1 — отображение множества R^ν в множество R^1, заданное равенством

$$\Psi_1(u) = \langle u, \Phi(y) - \Phi(x) \rangle_\nu \quad (u \in R^\nu).$$

Отметим, во-первых, что $\Psi_2(t) \in G$ при всех $t \in [0, 1]$, так как $\Psi_2(t) \in [x, y]$, а $[x, y] \subset G$, и, во-вторых, что отображение Ψ_1 линейно и $d_z\Psi_1 = \Psi_1$ при всяком $z \in R^\nu$ (предл. 1 п. 2, утверждение 4).

Применяя предложение 6 к сложному отображению F, видим, что оно дифференцируемо при любом $t \in (0, 1)$ и

$$d_tF = d_{\Phi(\Psi_2(t))}\Psi_1 \circ d_{\Psi_2(t)}\Phi \circ d_t\Psi_2 \qquad (t \in (0, 1)).$$

Ясно, что $d_t\Psi_2$ — линейное отображение, переводящее каждую точку $\tau \in R$ в точку $\tau(y - x) \in R^\nu$.

Наконец, заметим, что отображение F непрерывно в точках 0 и 1 как суперпозиция непрерывных отображений. Все сказанное позволяет применить теорему Лагранжа и утверждать, что существует число $\Theta \in (0, 1)$, такое, что

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu^2 &= F(1) - F(0) = F'(\Theta)\cdot 1 = (d_\Theta F)(1) = \\
&= (d_{\Phi(\Psi_2(\Theta))}\Psi_1 \circ d_{\Psi_2(\Theta)}\Phi \circ d_\Theta\Psi_2)(1) = \\
&= (d_{\Phi(\Psi_2(\Theta))}\Psi_1)\left[(d_{\Psi_2(\Theta)}\Phi)(y - x)\right] = \Psi_1\left[(d_{\Psi_2(\Theta)}\Phi)(y - x)\right] = \\
&= \langle d_{\Psi_2(\Theta)}\Phi(y - x), \Phi(y) - \Phi(x) \rangle_\nu \leqslant \\
&\leqslant \|d_{\Psi_2(\Theta)}\Phi(y - x)\|_\nu \cdot \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu.
\end{aligned}$$

Обозначим $\Psi_2(\Theta)$ через z. Ясно, что $z \in [x, y]$ и

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu^2 \leqslant \|d_z\Phi(y - x)\|_\nu \cdot \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu.$$

Разделив обе части последнего неравенства на $\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu$ (если $\Phi(y) - \Phi(x) = 0$, то неравенство (9) тривиально, так что можно считать, что $\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\nu > 0$), получим неравенство (9).

Предложение доказано.

Следствие. *Предположим, что Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^λ в пространство R^ν, а P — прямоугольник, содержащийся в G вместе со своей границей. Тогда отображение Φ равномерно диффе-*

ренцируемо на P, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)\cdot(x - y)\|_\nu \leqslant \varepsilon \|x - y\|_\lambda$$

при всех x, $y \in P$ таких, что $\|x - y\|_\lambda \leqslant \delta$.

Доказательство. Частная производная $D^{(j)}\varphi_i$ ($i \in \mathbf{N}_\nu$, $j \in \mathbf{N}_\lambda$) координатной функции φ_i отображения Φ непрерывна на множестве G, а так как множество $\overline{P} = P \cup \partial P$ ограничено, замкнуто и содержится в множестве G, то функция $D^{(j)}\varphi_i$ равномерно непрерывна на множестве $\overline{P}$, и тем более на множестве P. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдется такое положительное число δ_{ij} ($i \in \mathbf{N}_\nu$, $j \in \mathbf{N}_j$), что

$$|D^{(j)}\varphi_i(x) - D^{(j)}\varphi_i(y)| \leqslant \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\lambda\cdot\nu}}$$

при всех x, $y \in P$ таких, что $\|x - y\|_\lambda \leqslant \delta_{ij}$.

Положим

$$\delta = \min_{(i, j) \in \mathbf{N}_\nu \times \mathbf{N}_\lambda} \delta_{ij}.$$

Пусть $x \in P$. Рассмотрим вспомогательное отображение F множества G в пространство R^ν:

$$F(y) = \Phi(y) - \Phi'(x)y \quad (y \in G).$$

Ясно, что F — гладкое отображение. К нему применимо предложение 7: при любом $y \in P$

$$\|F(y) - F(x)\|_\nu \leqslant \|d_zF(y - x)\|_\nu,$$

где z — некоторая точка отрезка $[x, y]$ (заметим, что $[x, y] \subset P$, что легко следует из определения прямоугольника). Используя понятие нормы линейного отображения, видим, что

$$\|F(y) - F(x)\|_\nu \leqslant \|d_zF\|\cdot\|y - x\|_\lambda.$$

Заметим теперь, что

$$F(y) - F(x) = \Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)\cdot(y - x)$$

и что $d_zF = d_z\Phi - d_x\Phi$ (замечание 2 к определению 1). Предположим, что x, $y \in P$, $\|x - y\|_\nu \leqslant \delta$. Тогда

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)\cdot(y - x)\|_\nu =$$
$$= \|F(y) - F(x)\|_\nu \leqslant \|d_z\Phi - d_x\Phi\|\cdot\|y - x\|_\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{(i, j) \in \mathbf{N}_\nu \times \mathbf{N}_\lambda} [D^{(j)}\varphi_i(z) - D^{(j)}\varphi_i(x)]^2}\, \|y - x\|_\lambda.$$

Наконец, замечая, что $\|z - x\|_\lambda \leqslant \|y - x\|_\lambda \leqslant \delta$ и продолжая оценку, видим, что

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)\cdot(y - x)\|_\nu \leqslant$$
$$= \sqrt{\lambda\nu\cdot\frac{\varepsilon^2}{\lambda\nu}}\cdot\|y - x\|_\lambda = \varepsilon\|y - x\|_\lambda.$$

Следствие доказано.

Это следствие лежит в основе следующего предложения.

Предложение 8. Если Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^λ в пространство R^ν, а K — ограниченное множество, содержащееся в G вместе со своей границей, то отображение Φ равномерно дифференцируемо на K: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)\cdot(y-x)\|_\nu \leqslant \varepsilon \|y - x\|_\lambda \tag{10}$$

при всех $x, y \in K$, таких, что $\|x - y\|_\lambda \leqslant \delta$.

Доказательство. Множество $\overline{K} = K \cup \partial K$ ограничено и замкнуто. Если $t \in \overline{K}$, то $t \in G$, и в силу открытости множества G найдется открытый прямоугольник P_t, такой, что $t \in P_t$ и $\overline{P}_t \subset G$. Семейство прямоугольников $\{P_t\}$ $(t \in \overline{K})$ образует покрытие множества $\overline{K}: \overline{K} \subset \bigcup\limits_{t \in \overline{K}} P_t$, и по теореме 1 найдется конечное множество $K_0 \subset \overline{K}$, такое, что $\overline{K} \subset \bigcup\limits_{t \in K_0} P_t$.

Допустим теперь, что наше предложение неверно. Тогда существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\delta > 0$ найдутся точки $x, y \in K$, такие, что $\|x - y\|_\lambda \leqslant \delta$, но

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)\cdot(y-x)\|_\nu > \varepsilon_0 \|y - x\|_\lambda.$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathrm{N})$ и пусть x_n, y_n — такие точки множества K, что $\|x_n - y_n\|_\lambda \leqslant \frac{1}{n}$, но

$$\|\Phi(y_n) - \Phi(x_n) - \Phi'(x_n)\cdot(y_n - x_n)\|_\nu > \varepsilon_0 \|y_n - x_n\|_\lambda. \tag{11}$$

Для каждого $t \in K_0$ найдется в силу предыдущего следствия число $\delta_t > 0$, такое, что неравенство (10) выполняется при $\varepsilon = \varepsilon_0$ и при любых $x, y \in P_t$ и таких, что $\|x - y\|_\lambda \leqslant \delta_t$. Ввиду того, что $x_n \in \overline{K}$, $y_n \in \overline{K}$ $(n \in \mathrm{N})$, а $\overline{K}$ — ограниченное и замкнутое множество, найдется последовательность $\{n_l\}$ $(l \in \mathrm{N})$ и точка $\overline{x} \in \overline{K}$, такая, что

$$n_l \in \mathrm{N},\ n_l < n_{l+1}\ (l \in \mathrm{N}),\ \lim_{l \to \infty} x_{n_l} = \overline{x}$$

(теорема 1). Ясно, что $\lim\limits_{l \to \infty} y_{n_l} = \overline{x}$, ибо $\|x_{n_l} - y_{n_l}\|_\lambda \leqslant \frac{1}{n_l}$ $(l \in \mathrm{N})$. Точка $\overline{x}$ принадлежит прямоугольнику $P_{\overline{t}}$ при некотором $\overline{t} \in K_0$. Множество $P_{\overline{t}}$ открыто. Значит, $x_{n_l}, y_{n_l} \in P_{\overline{t}}$ при всех достаточно больших l. Кроме того, $\|x_{n_l} - y_{n_l}\|_\lambda \leqslant \delta_{\overline{t}}$ при всех достаточно больших l. Поэтому найдется число $l \in \mathrm{N}$, такое, что

$$x_{n_l}, y_{n_l} \in P_{\overline{t}},\ \|x_{n_l} - y_{n_l}\|_\lambda \leqslant \delta_{\overline{t}}.$$

Но тогда неравенство (10) справедливо при $x=x_{n_l}$, $y=y_{n_l}$ и $\varepsilon=\varepsilon_0$, что противоречит неравенству (11).

Предложение доказано.

Замечание. Заключение предложения 8 можно было бы сформулировать и так:

$$\Phi(y)=\Phi(x)+\Phi'(x)\cdot(y-x)+\|x-y\|_\lambda \alpha_x(y)$$

при всех x, $y\in K$, причем $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$, где

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{(x,\ y)\in K\times K\\ \|x-y\|_\lambda\leqslant\delta}}\|\alpha_x(y)\|_\nu .$$

Доказательство. Понятно, что $\omega(\delta_1)\leqslant\omega(\delta_2)$, если $0<\delta_1<\delta_2$. Вместе с тем при любом $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что

$$\|\alpha_x(y)\|_\nu\leqslant\varepsilon .$$

при всех x, $y\in K$, таких, что $\|x-y\|_\lambda\leqslant\delta$. Значит,

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{(x,\ y)\in K\times K\\ \|x-y\|_\lambda\leqslant\delta}}\|\alpha_x(y)\|_\nu\leqslant\varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$.

Мы уже знаем (см. теорему 4), что если линейное отображение множества R^ν в себя имеет ненулевой определитель, то оно взаимнооднозначно отображает множество R^ν *на* себя.

Смысл следующей теоремы состоит, грубо говоря, в том, что гладкое отображение Φ, якобиан которого в точке x_0 отличен от нуля, *локально*, т. е. вблизи точки x_0 ведет себя так же, как аффинное отображение $\Phi(x_0)+d_{x_0}\Phi$: сужение Φ на некоторую окрестность точки x_0 взаимнооднозначно, и отображает эту окрестность *на* некоторую окрестность точки $\Phi(x_0)$.

Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма. *Предположим, что Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^ν в пространство R^ν и $y\in R^\nu$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$. Пусть f — функция, заданная в G равенством*

$$f(x)=\|\Phi(x)-y\|_\nu^2 \quad (x\in G).$$

Тогда f — гладкая функция и

$$\operatorname{grad} f(x)=2(d_x\Phi)^*(\Phi(x)-y) \quad (x\in G) \tag{12}$$

(см. определение 5 п. 7 и определение 6 п. 6).

Доказательство. Выразим $f(x)$ с помощью координатных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ отображения Φ:

$$f(x)=\langle\Phi(x)-y,\ \Phi(x)-y\rangle_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}(\varphi_k(x)-y_k)^2.$$

Из этого равенства сразу следует гладкость функции f, так как квадрат гладкой функции и сумма конечного семейства гладких функций — снова гладкая функция. Вычислим $D^{(j)} f(x)$:

$$D^{(j)} f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\nu} (\varphi_k(x) - y_k) \cdot D^{(j)} \varphi_k(x) \quad (x \in G,\ j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

т. е. $\operatorname{grad} f(x) = 2 [\Phi'(x)]^* (\Phi(x) - y)$ $(x \in G)$. Но это и значит (предл. 8 п. 6), что выполняется равенство (12).

Лемма доказана.

Теорема 6 (д. 3). *Пусть G — открытое множество пространства R^ν, $x_0 \in G$ и Φ — гладкое отображение множества G в множество R^ν. Если* $\det \Phi'(x_0) \neq 0$, *то существует такое число $\rho > 0$, что*

1) *$D^\nu(x_0, \rho) \subset G$ и множество $\Phi[D^\nu(x_0, \rho)]$ содержит некоторый шар с центром в точке $\Phi(x_0)$, т. е. Φ отображает шар $D^\nu(x_0, \rho)$ на некоторую окрестность точки $\Phi(x_0)$;*

2) *сужение отображения Φ на шар $D^\nu(x_0, \rho)$ взаимнооднозначно, т. е. из условий $x', x'' \in D^\nu(x_0, \rho)$, $x' \neq x''$ следует, что $\Phi(x') \neq \Phi(x'')$. Более того, существует такое число $q > 0$, что*

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\|_\nu \geqslant q \|x' - x''\|_\nu, \tag{13}$$

каковы бы ни были точки $x', x'' \in D^\nu(x_0, \rho)$.

Доказательство. Начнем с доказательства взаимной однозначности сужения отображения Φ на некоторый шар $D^\nu(x_0, r)$.

С этой целью проверим, что если две точки $x_1, x_2 \in G$ достаточно близки к точке x_0 и $x_1 \neq x_2$, то $\Phi(x_1) - \Phi(x_2) \neq 0$. Воспользуемся гладкостью отображения Φ:

$$\Phi(x_1) - \Phi(x_2) = \Phi'(x_2) \cdot (x_1 - x_2) + \|x_2 - x_1\|_\nu \alpha_{x_2}(x_1),$$
$$\lim_{x \to x_2} \alpha_{x_2}(x) = 0.$$

Применяя предложение 5, видим, что существуют числа $r_1 > 0$ и $c > 0$, такие, что

$$\|\Phi'(x) \cdot h\|_\nu \geqslant c \|h\|_\nu$$

при всех $x \in D^\nu(x_0, r_1)$, $h \in R^\nu$ (r_1 надо взять таким, чтобы $\overline{D^\nu(x_0, r_1)} \subset G$, $\det \Phi'(x) \neq 0$ при всех $x \in \overline{D^\nu(x_0, r_1)}$). С другой стороны, по замечанию к предложению 8 (в качестве K берем $\overline{D^\nu(x_0, r_1)}$), существует число $r_2 > 0$, такое, что

$$\|\alpha_{x_2}(x_1)\| < \frac{c}{2}$$

при всех $x_1, x_2 \in D^\nu(x_0, r_2)$.

Положим $r_3 = \min(r_1, r_2)$. Пусть $x', x'' \in D^\nu(x_0, r_3)$ и $x' \neq x''$. Тогда

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\|_\nu \geqslant \|\Phi'(x'')\cdot(x''-x')\|_\nu - \|\alpha_{x''}(x')\|_\nu \|x'-x''\|_\nu.$$

Ввиду того, что $x'' \in D^\nu(x_0, r_3) \subset D^\nu(x_0, r_1)$, $\|\Phi'(x'')\cdot(x''-x')\|_\nu \geqslant c\|x''-x'\|_\nu$, а ввиду того, что $x', x'' \in D^\nu(x_0, r_3) \subset D^\nu(x_0, r_2)$, $\|\alpha_{x''}(x')\|_\nu < \frac{c}{2}$. Поэтому

$$\|\Phi(x'') - \Phi(x')\|_\nu > c\|x''-x'\|_\nu - \frac{c}{2}\|x''-x'\|_\nu = \frac{c}{2}\|x''-x'\|_\nu$$

и $\Phi(x') \neq \Phi(x'')$.

Итак, сужение отображения Φ на шар $D^\nu(x_0, r_3)$ взаимно-однозначно, и, более того, при $q = \frac{c}{2}$

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\|_\nu \geqslant q\|x'-x''\|_\nu$$

при всех $x', x'' \in D^\nu(x_0, r_3)$.

Утверждение 2 доказано полностью.

Теперь проверим, что образ некоторого достаточно малого шара с центром в точке x_0 при отображении Φ есть окрестность точки $\Phi(x_0)$ (пока что мы не будем добиваться того, чтобы эта окрестность была открытой). С этой целью мы зафиксируем точку y, достаточно близкую к точке $\Phi(x_0)$, и изучим расстояние между точками $\Phi(x)$ и y, когда x изменяется в некотором достаточно малом *замкнутом* шаре V с центром в точке x_0. Мы покажем, что это расстояние достигает минимума во внутренней точке x_* упомянутого шара, и, приравнивая нулю градиент этого расстояния в точке x_* (предл. 3), получим, что $\Phi(x_*) = y$. Значит, любая точка y, достаточно близкая к y_0, есть образ точки, принадлежащей шару V с центром в точке x_0, что и требуется.

Приступим к выполнению намеченного плана. Пусть $y \in R^\nu$ и пусть

$$\varphi(x) = \|\Phi(x) - y\|_\nu^2 \quad (x \in G).$$

Рассмотрим такое число $\rho > 0$, что $\overline{D^\nu(x_0, \rho)} \subset G$. Так как функция φ непрерывна на множестве G, то существует точка x_* из шара $\overline{D^\nu(x_0, \rho)}$, такая, что

$$\varphi(x_*) \leqslant \varphi(x) \quad \left(x \in \overline{D^\nu(x_0, \rho)}\right)$$

(см. теорему 2). Покажем, что $\|x_* - x_0\|_\nu < \rho$ при всяком достаточно малом ρ и при всяком y, достаточно близком к $\Phi(x_0)$, т. е. что x_* принадлежит о т к р ы т о м у шару $D^\nu(x_0, \rho)$.

Пусть $\rho < r_3$. Множество $\partial D^\nu(x_0, \rho)$ — граница шара $D^\nu(x_0, \rho)$ — ограничено и замкнуто. Поэтому его образ при гладком (и, тем самым, непрерывном) отображении Φ — снова замкнутое множество (следствие теоремы 2). Обозначим это множество символом S_ρ. Ввиду того, что $\partial D^\nu(x_0, \rho) \subset D^\nu(x_0, r_3)$, $\Phi(x_0) \overline{\in} S_\rho$, ибо в шаре $D^\nu(x_0, r_3)$ отображение Φ взаимнооднозначно. Но тогда (предл. 3 п. 4) найдется такое число γ, что $\gamma > 0$ и $\|\Phi(x_0) - z\|_\nu \geqslant \gamma$ при всех $z \in S_\rho$. Пусть же $\|\Phi(x_0) - y\|_\nu < \frac{\gamma}{2}$. Тогда

$$\varphi(x) = \|\Phi(x) - y\|_\nu^2 = \|[\Phi(x) - \Phi(x_0)] + [\Phi(x_0) - y]\|_\nu^2 \geqslant$$

$$\geqslant (\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_\nu - \|\Phi(x_0) - y\|_\nu)^2 > \left(\gamma - \frac{\gamma}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2,$$

какова бы ни была точка $x \in \partial D^\nu(x_0, \rho)$.

В то же время $\varphi(x_*) \leqslant \varphi(x_0) < \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$. Поэтому $x_* \in D^\nu(x_0, \rho)$. Но, по лемме,

$$\operatorname{grad} \varphi(x_*) = 2(d_{x_*}\Phi)^*(\Phi(x_*) - y).$$

А так как $\rho < r_3$, то $\rho < r_1$ и линейное отображение $d_{x_*}\Phi$, а с ним и $(d_{x_*}\Phi)^*$ (предл. 8 п. 6) обратимо. Из равенства (см. предл. 3)

$$(d_{x_*}\Phi)^*(\Phi(x_*) - y) = 0$$

следует, что

$$\Phi(x_*) - y = 0,$$

т. е. $\Phi(x_*) = y$.

Итак, для любой точки $y \in R^\nu$, удовлетворяющей неравенству $\|y - \Phi(x_0)\|_\nu < \frac{\gamma}{2}$, существует точка x_* такая, что $\|x_* - x_0\|_\nu < \rho$ и $\Phi(x_*) = y$, т. е.

$$\Phi[D^\nu(x_0, \rho)] \supset D^\nu\left(\Phi(x_0), \frac{\gamma}{2}\right).$$

Значит, во-первых, сужение отображения Φ на шар $D^\nu(x_0, \rho)$ взаимнооднозначно, во-вторых, Φ отображает шар $D^\nu(x_0, \rho)$ на некоторую окрестность точки $\Phi(x_0)$ и, в-третьих, выполняется неравенство (13) при всех $x', x'' \in D^\nu(x_0, \rho)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если Φ — гладкое отображение открытого множества G пространства R^ν в множество R^ν и если $\det \Phi'(x) \neq 0$ при всех $x \in G$, то образ $\Phi[B]$ любого открытого множества B, содержащегося в множестве G, — снова открытое множество.*

Доказательство. Пусть B — открытое множество, $B \subset G$ и пусть $y_0 \in \Phi[B]$. Покажем, что существует окрестность точки y_0, содержащаяся в $\Phi[B]$. Раз $y_0 \in \Phi[B]$, то существует точка $x_0 \in B$ такая, что $\Phi(x_0) = y_0$.

Применим теперь теорему к сужению отображения Φ на открытое множество B. Ясно, что $\Phi|_B$ — гладкое отображение множества B в множество R^ν и

$$\det [\Phi|_B]'(x_0) = \det \Phi'(x_0) \neq 0.$$

Поэтому найдется такое число $\rho > 0$, что $D^\nu(x_0, \rho) \subset B$ и $\Phi|_B [D^\nu(x_0, \rho)] = \Phi [D^\nu(x_0, \rho)]$ есть окрестность точки $\Phi(x_0)$. Вместе с тем $\Phi [D^\nu(x_0, \rho)] \subset \Phi [B]$.

Следствие доказано.

Предложение 9. Пусть Φ—гладкое отображение открытого множества G пространства R^ν в пространство R^ν. Если Φ— взаимнооднозначное отображение и если $\det \Phi'(x) \neq 0$ при всех $x \in G$, то обратное отображение Φ^{-1}, заданное на открытом множестве $\Phi[G]$, гладко и

$$(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) = [\Phi'(x)]^{-1} \quad (x \in G),$$

т. е. матрица Якоби отображения Φ^{-1} в точке $\Phi(x) \in \Phi[G]$ равна матрице, обратной к матрице Якоби отображения Φ в точке $x \in G$.

Доказательство. Положим $\Phi^{-1} = \Psi$. Пусть y, $y_0 \in \Phi[G]$, $x = \Psi(y)$, $x_0 = \Psi(y_0)$. Тогда

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Phi'(x_0) \cdot (x - x_0) + \|x - x_0\|_\nu \alpha(x),$$

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Переписывая последнее равенство в виде

$$\Phi'(x_0) \cdot (x - x_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0) - \|x - x_0\|_\nu \alpha(x)$$

и умножая его слева на $[\Phi'(x_0)]^{-1}$, получим

$$x - x_0 = [\Phi'(x_0)]^{-1} \cdot [\Phi(x) - \Phi(x_0)] - [\Phi'(x_0)]^{-1} (\|x - x_0\|_\nu \cdot \alpha(x)),$$

т. е.

$$\Psi(y) - \Psi(y_0) = [\Phi'(x_0)]^{-1} \cdot (y - y_0) - [\Phi'(x_0)]^{-1} \cdot (\|x - x_0\|_\nu \alpha(\Psi(y))). \tag{14}$$

Допустим, что $\lim\limits_{y \to y_0} \Psi(y) = \Psi(y_0) = x_0$, т. е. что отображение Ψ непрерывно в точке y_0 ($y_0 \in \Phi[G]$). Тогда если $x \neq x_0$, x, $x_0 \in G$, то

$$\frac{\|x - x_0\|_\nu}{\|y - y_0\|_\nu} = \frac{\|x - x_0\|_\nu}{\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_\nu} = \frac{\|x - x_0\|_\nu}{\|\Phi'(x_0) \cdot (x - x_0) + \|x - x_0\|_\nu \alpha(x)\|_\nu}.$$

Согласно предложению 5, при некотором $c > 0$

$$\|\Phi'(x_0) \cdot (x - x_0)\|_\nu \geqslant c \|x - x_0\|_\nu \quad (x \in R^\nu),$$

ибо $\det \Phi'(x_0) \neq 0$ (в предл. 5 в качестве множества K нужно взять одноточечное множество $\{x_0\}$). С другой стороны, найдется такое число $\sigma > 0$, что $\|\alpha(x)\|_\nu < \frac{c}{2}$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $\|x-x_0\|<\sigma$. Поэтому при всех $x\in D^\nu(x_0, \sigma)$ (см. следствие предл. 2 п. 2)

$$\|\Phi'(x_0)\cdot(x-x_0)+\|x-x_0\|_\nu\alpha(x)\|_\nu\geqslant$$
$$\geqslant\|\Phi'(x_0)\cdot(x-x_0)\|_\nu-\|x-x_0\|_\nu\|\alpha(x)\|_\nu\geqslant$$
$$\geqslant c\|x-x_0\|_\nu-\|x-x_0\|_\nu\frac{c}{2}=\frac{c}{2}\|x-x_0\|_\nu$$

и

$$\frac{\|x-x_0\|_\nu}{\|y-y_0\|_\nu}\leqslant\frac{\|x-x_0\|_\nu}{\frac{c}{2}\|x-x_0\|_\nu}\leqslant\frac{2}{c},$$

если $\|\Psi(y)-\Psi(y_0)\|_\nu<\sigma$, $y\neq y_0$.

Итак (см. (14)),

$$\frac{\|\Psi(y)-\Psi(y_0)-[\Phi'(x_0)]^{-1}(y-y_0)\|_\nu}{\|y-y_0\|_\nu}=$$
$$=\frac{\|[\Phi'(x_0)]^{-1}(\|x-x_0\|_\nu\alpha(\Psi(y)))\|_\nu}{\|y-y_0\|_\nu}\leqslant$$
$$\leqslant\|[\Phi'(x_0)]^{-1}\|\frac{\|x-x_0\|_\nu}{\|y-y_0\|_\nu}\|\alpha(\Psi(y))\|_\nu\leqslant$$
$$\leqslant\|[\Phi'(x_0)]^{-1}\|\cdot\frac{2}{c}\cdot\|\alpha(\Psi(y))\|_\nu,$$

если $\|\Psi(y)-\Psi(y_0)\|_\nu<\sigma$, $y\neq y_0$, $y\in\Phi[G]$. Но $\lim\limits_{y\to y_0}\Psi(y)=\Psi(y_0)$, поэтому найдется такое $\delta>0$, что $\|\Psi(y)-\Psi(y_0)\|<\sigma$ при всех y таких, что $\|y-y_0\|_\nu<\delta$, и, значит, последнее неравенство справедливо при всех $y\in D^\nu(y_0, \delta)$, $y\neq y_0$. Ясно, что $\lim\limits_{y\to y_0}\alpha(\Psi(y))=0$, так как $\lim\limits_{y\to y_0}\Psi(y)=\Psi(y_0)$, и потому

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\|\Psi(y)-\Psi(y_0)-[\Phi'(x_0)]^{-1}\cdot(y-y_0)\|_\nu}{\|y-y_0\|_\nu}=0.$$

Это и означает, что отображение Ψ дифференцируемо в точке y_0 и что $\Psi'(y_0)=[\Phi'(x_0)]^{-1}$, где $x=\Psi(y_0)$, $y_0\in\Phi[G]$. Если будет доказана непрерывность отображения Ψ в любой точке $y_0\in\Phi[G]$, то из сказанного будет вытекать также гладкость отображения Ψ. Действительно (см. замечание 2 к предл. 6 п. 6),

$$[\Phi'(x)]^{-1}=\left\{\frac{d_{ij}(D^{(1)}\varphi_1(x), D^{(2)}\varphi_1(x), \ldots, D^{(\nu)}\varphi_\nu(x))}{\det\Phi'(x)}\right\}$$
$$((i, j)\in \mathbf{N}_\nu\times\mathbf{N}_\nu)\quad(x\in G),$$

где d_{ij} — непрерывные функции.

Обозначим $\dfrac{d_{ij}(D^{(1)}\varphi_1(x), \ldots, D^{(\nu)}\varphi_\nu(x))}{\det\Phi'(x)}$ символом $B_{ij}(x)$ $(x\in G)$.

Функции B_{ij} непрерывны на множестве G, так как частные производные $D^{(j)}\varphi_i$ $(i, j \in \mathbf{N}_\nu)$ непрерывны, функция J $(J(x) = \det \Phi'(x)$ $(x \in G))$ непрерывна на множестве G (замечание 1 к предл. 4 п. 6) и не обращается в нуль. Но

$$\Psi'(y) = \{B_{ij}(\Psi(y))\} \quad ((i, j) \in \mathbf{N}_\nu \times \mathbf{N}_\nu, \ y \in \Phi[G]),$$

так что $D^{(j)}\psi_i = B_{ij} \circ \Psi$ ($\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ — координатные функции отображения Ψ). Таким образом, частные производные $D^{(j)}\psi_i$ непрерывны в $\Phi[G]$ в силу предл. 5 п. 3.

Итак, осталось доказать, что $\lim\limits_{y \to y_0} \Psi(y) = \Psi(y_0)$ при любом $y_0 \in \Phi[G]$. Рассмотрим точку $x = \Psi(y_0)$ и число $r > 0$, такое, что $\overline{D^\nu(x_0, r)} \subset G$. Тогда $\Phi\left[D^\nu(x_0, r)\right]$, по следствию к теореме 6, есть открытое множество, содержащее точку y_0. Кроме того, шар $D^\nu(x_0, r)$ можно считать столь малым, что (в соответствии с утверждением 2 теоремы 6) для любых двух точек x', x'' этого шара справедливо неравенство (13). Но неравенство (13) теперь можно переписать в таком виде (полагая $y' = \Phi(x')$, $y'' = \Phi(x'')$):

$$\|\Psi(y') - \Psi(y'')\|_\nu \leqslant q^{-1} \|y' - y''\|_\nu \ \left(y', y'' \in \Phi\left[D^\nu(x_0, r)\right]\right).$$

Стало быть, отображение Ψ равномерно непрерывно на открытом множестве $\Phi\left[D^\nu(x_0, r)\right]$, содержащем точку y_0, и, тем более, непрерывно в точке y_0.

Предложение доказано.

Следствие. *Пусть Φ — отображение, удовлетворяющее условиям предыдущего предложения и пусть $\widetilde{\Gamma}(x) = \left\| [\Phi'(x)]^{-1} \right\|$ $(x \in G)$. Функция $\widetilde{\Gamma}$ непрерывна на множестве G.*

Доказательство. По доказанному $[\Phi'(x)]^{-1} = \left[\Phi^{-1}\right]'(\Phi(x))$ $(x \in G)$, так что

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \left\| \left[\Phi^{-1}\right]'(\Phi(x)) \right\| = \|\Psi'(\Phi(x))\| \quad (x \in G).$$

Следствие вытекает теперь из гладкости отображения Ψ (предл. 4 п. 7 и предл. 5 п. 3).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Теория меры** 9

§ 1. Системы множеств 10
§ 2. Аддитивные функции множества 27
§ 3. Лебеговское расширение меры. Мера Лебега μ_ν . . . 53
§ 4. Инвариантность меры Лебега относительно движений . 76

Глава II. **Интеграл** 84

§ 1. Определение интеграла 88
§ 2. Элементарные свойства интеграла 101
§ 3. Измеримые функции 127
§ 4. Предельный переход под знаком интеграла . . . 151
§ 5. Теорема Фубини 170
§ 6. Некоторые приложения интеграла Лебега. Замена переменных в интеграле 197

Глава III. **Интегралы, зависящие от параметра** 223

§ 1. Несобственные интегралы . . . . —
§ 2. Элементарная теория интегралов, зависящих от параметра 240
§ 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра . . 250

Добавление 1. **Некоторые сведения о множествах и функциях** . . 266

Добавление 2. **Суммируемые числовые семейства** 289

Добавление 3. **Пространства R^ν. Гладкие отображения** 308

Акилов Глеб Павлович, Макаров Борис Михайлович,
Хавин Виктор Петрович

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛА

Редактор *З. И. Царькова*
Переплет художника *А. А. Ежова*
Техн. редактор *В. С. Кузина* Корректоры *Е. К. Терентьева, Г. В. Краснухина*

М-12606. Сдано в набор 26 III 1968 г. Подписано к печати 6 V 1969 г.
Формат бум. $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Печ. л. 22.
Уч.-изд. л. 24,28. Бум. л. 11. Тираж 5000 экз. Заказ 159. Цена 78 коп. (в переплете).
Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова

Типография ЛГУ. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

78 коп.